

ГИДРОДИНАМИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЭНЕРГЕТИКА

УДК 536.243

Е. К. Вачагина, Г. Р. Халитова, Ю. В. Карасева,
И. А. Трахунова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА В РЕАКТОРЕ МЕТАНОВОГО БРОЖЕНИЯ

Ключевые слова: метантенк, теплообмен, температурный режим.

В данной работе предложена математическая модель теплообмена в системе поддержания температурного режима в реакторе метанового брожения, позволяющая рассчитывать гидродинамические и температурные поля внутри реактора.

Keywords: anaerobic digester, heat exchange, temperature.

In this paper, the mathematical model of heat exchange in the system to maintain temperature in anaerobic digester, which allows calculating the hydrodynamic and temperature fields inside the reactor.

Введение

Работы по обоснованию и оптимизации теплового режима в метантенках, а также микробиологическому исследованию химических процессов проводили российские ученые Панцхава Е.С., Друзьянова В.П., Марченко В.И., Келов К., Ковалев А.А. и др.; и зарубежные ученые: Chen Y., Hashimoto A.G., Safley L.M., Westerman P.W., Toprak H., Masse D.I., Droste R.L., Minott S.J., Blumensaat F. и др. [1-3].

В литературе известны работы, посвященные изучению процессов теплопереноса и гидродинамики в реакторах метанового брожения. Fleming (2002) [4] разработал трехмерную модель гидродинамики и теплообмена для покрытых лагун. Vesvikar и Al-Dahhan (2005) провели трехмерное, стационарное моделирование для определения картины течения внутри реактора с барботажным перемешиванием. Впервые результаты численных исследований были сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в результате применения метода меченых атомов (изотопных индикаторов) [5]. Grebmedhin (2005) разработал одномерную комплексную модель теплообмена для реактора идеального вытеснения [6]. На основе этой модели Wu и Bibeau (2006) [7] разработали трехмерную модель теплопереноса для анаэробных реакторов, работающих в холодных климатических условиях. Wu and Chen (2008) создали трехмерную модель гидродинамики для метантенков. Течение субстрата в реакторе – турбулентное [8]. Результаты численных исследований были сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в лабораторных и опытно-промышленных условиях.

В отечественной литературе моделирование теплообмена в реакторе метанового брожения, как правило, сводится к инженерным расчетам [9-12]. Численному моделированию процессов теплопереноса в метантенке посвящено малое

количество работ (Землянка А.А., 2004; Вачагина Е.К., 2009; Кудряшова А.Г., 2011; Шаяхметов Р.Г., 2011).

Землянка А.А. (2004) описал процессы теплообмена и гидродинамики в цилиндрическом метантенке с погруженным в него цилиндрическим теплообменником [13]. Вачагина Е.К. (2009) создала математическую модель движения двухфазной газожидкостной среды в цилиндрическом ферментаторе биогазовой установки [14]. Кудряшова А.Г. (2011) разработала математическую модель процесса нагрева биомассы с использованием энергии трубчатого электронагревателя [15]. Шаяхметов Р.Г. (2011) разработал модель циркуляционного перемешивания субстрата в метантенке [16].

В данной работе предложена математическая модель теплообмена в системе поддержания температурного режима в реакторе метанового брожения.

Математическая модель

Математическая модель получена для реактора цилиндрической формы. Для поддержания температуры в реакторе используется теплообменник в виде труб спирально навитых с внешней стороны реактора, по которым циркулирует теплоноситель (вода). Для минимизации потерь тепла в окружающую среду реактор и трубы покрыты слоем изоляции.

Основные допущения:

- 1) Процессы переноса тепла в резервуаре определяются теплопроводностью и свободной конвекцией;
- 2) Течение жидкости в резервуаре носит ламинарный характер;
- 3) Окружная составляющая скорости жидкости в резервуаре незначительна;
- 4) Поле скоростей в греющих трубах характеризуется наличием только одной окружной составляющей скорости;

5) Процессом переноса тепла за счет теплопроводности в направлении основного движения жидкости в греющих трубах по сравнению с конвективным переносом тепла можно пренебречь;

6) Теплофизические характеристики жидкости в резервуаре за исключением плотности, и в греющих трубах, а также теплофизические характеристики слоя изоляции в ходе процессов теплопереноса не меняются;

7) Плотность жидкости в резервуаре является функцией температуры;

8) Силами тяжести при движении жидкости в греющих трубах можно пренебречь.

Математическая модель рассматриваемой задачи получена на основе уравнений механики сплошных сред [17] и имеет следующий вид.

Уравнения движения, неразрывности и переноса энергии для жидкости в резервуаре:

область 1:

$$\rho^*(\theta) \left(\frac{\partial u_r}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{dv_0 \rho_0} \left[\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(2y \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) - \frac{2}{y^2} u_r \right] \quad (1)$$

$$\rho^*(\theta) \left(\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = - \frac{d\rho^*(\theta)g}{v_0^2} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{dv_0 \rho_0} \left[\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho^*(\theta)}{\partial \tau} + \frac{1}{y} \frac{\partial \rho^*(\theta) y u_r}{\partial y} + \frac{\partial \rho^*(\theta) u_z}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\rho^*(\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial \theta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\lambda}{dv_0 C_p \rho_0} \cdot \left[\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right], \quad (4)$$

где r, φ, z - переменные цилиндрической системы координат; t - время; x, y, τ - безразмерные

переменные: $r = yd$; $z = xd$; $z = xd$; $t = \tau \frac{d}{v_0}$, d -

характерный линейный размер (диаметр обогревающих каналов); v_r, v_z, u_r, u_z - радиальная и осевая составляющие вектора скорости и соответствующие им безразмерные компоненты:

$v_r = u_r v_0$, $v_z = u_z v_0$; $v_0 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$ - среднерасходная

скорость жидкости в обогревающих каналах; Q - расход жидкости через обогревающие каналы;

$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$ - безразмерная температура; T -

температура; T_0 - температура окружающего

резервуар воздуха; T_1 - температура греющего теплоносителя на входе в обогревающие трубы; $P = p \rho_0 v_0^2$ - давление; p - безразмерное давление; $\rho = \rho_0 \rho^*(\theta)$ - плотность жидкости; ρ_0 - плотность жидкости при температуре T_0 .

Уравнение переноса тепла в слое изоляции: область 2:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a_i}{dv_0} \left[\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right], \quad (5)$$

где $a_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i \cdot C_{pi}}$ - температуропроводность слоя

изоляции; $\rho_i, C_{pi}, \lambda_i$ - плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности тепловой изоляции.

Уравнение переноса тепла в круглых трубах, навитых на резервуар

область 3:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_{v\varphi} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{a_v}{dv_{\varphi_0}} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right),$$

(6)

где $a_v = \frac{\lambda_v}{\rho_v \cdot C_{pv}}$ - температуропроводность

греющего теплоносителя; $\rho_v, C_{pv}, \lambda_v$ - плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности

греющего теплоносителя; $u_{v\varphi} = \frac{v_{v\varphi}}{v_{\varphi_0}}$ - безразмерная

скорость движения жидкости в греющих трубах; $v_{v\varphi}$ - скорость движения жидкости в греющих

трубах, которая имеет параболический характер для ламинарных режимов течения; $u_{v\varphi_0} = \frac{8 \cdot Q}{\pi \cdot d^2 \cdot v_0}$.

$$v_{v\varphi} = \frac{2Q}{\pi \left(\frac{d}{2} \right)^4 \cdot v_0} \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 - d^2 (x - x_c)^2 - d^2 \left(y - \frac{R}{d} - \frac{1}{2} \right)^2 \right), \quad (7)$$

где R - радиус резервуара; x_c - вертикальная безразмерная координата центров окружностей греющих труб, которая в случае расположения греющих труб по окружностям не зависит от координаты φ и вычисляется для j -той трубы по формуле:

$$(x_c)_j = x_0 + \frac{2S}{d} j, \quad (8)$$

где S - расстояние между центрами греющих труб, а в случае спирально навитых труб зависит от координаты φ и вычисляется по формуле:

$$x_c = x_0 + \frac{2S}{d} \frac{\varphi}{2\pi}, \quad (9)$$

где S - расстояние между центрами греющих труб при изменении угла φ на величину 2π , x_0 - вертикальная безразмерная координата центра

окружности наиболее низко расположенной греющей трубы.

Каждая из рассмотренных областей характеризуется следующими диапазонами изменения независимых переменных задачи:

Условия однозначности для рассматриваемой системы уравнений имеют вид:

I. Гидродинамические условия:

1. На границах области 1 и области 3 задаются гидродинамические условия прилипания жидкости:

На границах области 1 это условие запишется в виде

$$1) \text{ для } y = \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq x \leq \frac{H}{d} :$$

$$\vec{v}\left(\frac{R}{d}, \varphi, x\right) = 0,$$

где H - высота слоя жидкости в резервуаре;

$$2) \text{ для } 0 \leq y \leq \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, x = 0 :$$

$$\vec{v}(y, \varphi, 0) = 0 ;$$

3) для

$$0 \leq y \leq \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, x = \frac{H}{d} :$$

$$\vec{v}\left(y, \varphi, \frac{H}{d}\right) = 0 .$$

На границе области 3, определяемой соотношениями:

$$y = \frac{R}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (x - x_c)^2}$$

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_k, x_c - \frac{1}{2} \leq x \leq x_c + \frac{1}{2}$$

это условие запишется в виде $v_{v\varphi} = 0$, где φ_k - конечное значение угловой координаты.

2. Считается заданным расход греющего теплоносителя Q через обогревающие трубы, это условие уже учтено при записи выражения для скорости $v_{v\varphi}$.

II. Граничные условия для температуры:

1. На поверхностях, разделяющих области ставятся граничные условия четвертого рода:

На границе, разделяющей области 1 и 3, определяемой соотношениями:

$$y = \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$x_c - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2f}{d}\right) \leq x \leq x_c + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2f}{d}\right)$$

$$\theta|_1 = \theta|_3, \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial n}|_1 = \lambda_3 \frac{\partial \theta}{\partial n}|_3,$$

где $2f$ - часть длины окружности греющих труб, непосредственно, примыкающей к резервуару.

На границе, разделяющей области 1 и 2, определяемой соотношениями:

$$y = \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq x \leq x_0 - \left(\frac{2f}{d}\right)$$

$$y = \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, x_c + \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{2f}{d}\right) \leq x \leq x_c - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{2f}{d}\right)$$

$$\theta|_1 = \theta|_2, \lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial n}|_1 = \lambda_2 \frac{\partial \theta}{\partial n}|_2.$$

На границе, разделяющей области 2 и 3, выполняются условия:

$$\theta|_2 = \theta|_3, \lambda_2 \frac{\partial \theta}{\partial n}|_2 = \lambda_3 \frac{\partial \theta}{\partial n}|_3,$$

где номера, стоящие около соответствующих неизвестных распределений температур соответствуют номерам рассматриваемых областей.

2. На поверхностях, разделяющих области 1 и 2 от окружающего пространства ставятся граничные условия третьего рода:

На границах области 1 это соотношение запишется в виде:

$$1) \text{ для } 0 \leq y \leq \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, x = \frac{H}{d} :$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}|_1 = -\frac{d\alpha_{11}}{\lambda} \theta|_1,$$

$$2) \text{ для } 0 \leq y \leq \frac{R}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, x = 0 :$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}|_1 = -\frac{d\alpha_{12}}{\lambda} \theta|_1.$$

На границе области 2, определяемой соотношениями:

$$y = \frac{R + \delta_i}{d}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq x \leq \frac{H}{d} \quad \text{это условие}$$

запишется в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}|_2 = -\frac{d\alpha_2}{\lambda} \theta|_2,$$

где δ_i - толщина слоя изоляции; α_{11}, α_{12} - коэффициенты теплоотдачи от поверхности и от днища резервуара, α_2 - коэффициент теплоотдачи от слоя изоляции в окружающий воздух.

3. На входе в греющие трубы считается заданной температура жидкости:

$$\theta(y, 0, x)|_3 = \theta_3 = \text{const}.$$

III. Условия периодичности гидродинамических и температурных полей в резервуаре по пространственной переменной φ :

область 1:

$$\vec{v}(y, \varphi + 2\pi, x) = \vec{v}(y, \varphi, x).$$

IV. Начальные условия:

1. В начальный момент времени считается заданным распределение поля скоростей в областях 1 и 2.

область 1:

Жидкость в резервуаре в начальный момент времени находится в состоянии покоя:

$$\vec{v}(y, \varphi, x) = 0.$$

$$\theta(y, \varphi + 2\pi, x) = \theta(y, \varphi, x).$$

область 3:

Жидкость в греющих трубах имеет развитый изотермический профиль скорости v_{φ} , определенный выше.

2. В начальный момент времени считается заданным значение температуры во всех трех областях:

область 1,2,3:

$$\theta(y, \varphi, x) = \theta_{01} = \text{const};$$

где θ_{01} - начальное значение температуры.

Данная система уравнений описывает процессы теплопереноса при любом расположении обогревающих труб. Основное различие состоит в определении поверхностей, разделяющих области определения переменных рассматриваемой задачи.

Решение поставленной выше задачи будет производиться с помощью метода конечных элементов. При этом в процессе решения предполагается вычисление следующих интегральных характеристик задачи: θ_s - среднее значение температуры жидкости в резервуаре; Q_0 - количество тепла, переданное в единицу времени от поверхности резервуара; Q_1 - количество тепла, переданное в единицу времени от поверхности греющих труб в резервуар.

При произвольных режимных характеристиках рассматриваемых процессов передачи тепла, таких как расход греющей жидкости и ее температуры процессы передачи тепла являются нестационарными процессами.

На практике часто необходимо найти частное решение поставленной выше задачи, а именно задачи поддержания некоторой постоянной температуры в резервуаре. При этом необходимо определить, необходимые для этого значения расхода и температуры греющей жидкости, которые методом последовательных уточнений, т.е. последовательным увеличением температуры греющей жидкости на входе. Критерием окончания такого процесса при этом является постоянство величины θ_s - средней температуры жидкости в резервуаре и равенство соответствующих количеств теплоты $Q_0 = Q_1$.

Заключение

В данной работе предложена математическая модель теплообмена в системе поддержания температурного режима в реакторе метанового брожения, позволяющая рассчитывать гидродинамические и температурные поля внутри реактора.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (Соглашение №14.В37.21.0299 между

Министерством образования и науки Российской Федерации и ФГБОУ ВПО «КНИТУ»).

Литература

1. B. Wu, E.L. Bibeau, K.G. Gebremedhin. Three-dimensional numerical simulation model of biogas production for anaerobic digesters. *Canadian Biosystems Engineering*, 51, 81 – 87 (2009).
2. А.З. Миндубаев, С.Т. Минзанова, Е.В. Скворцов, В.Ф. Миронов, В.В. Зобов, Ф.Ю. Ахмадуллина, Л.Г. Миронова, Д.Е. Белостоцкий, А.И. Коновалов, Оптимизация параметров выработки биогаза в лабораторном масштабе, *Вестник Казан. технол. ун-та*, 4, 233 - 240 (2009).
3. Д.В. Костромин. Автореф. дисс. канд. тех. наук, ГНУ ГОСНИТИ, Москва, 2010. 18 с.
4. J.G. Fleming. Novel simulation of anaerobic digestion using computational fluid dynamics. PhD Dissertation. North Carolina State University, Raleigh, NC. 2002.
5. M.S. Vesvikar, M. Al-Dahhan. Flow pattern visualization in a mimic anaerobic digester using CFD. *Biotechnology and Bioengineering*, 89, 719 – 732 (2005).
6. K.G. Gebremedhin, B. Wu, C. Gooch, P. Wright, S. Inglis. Heat transfer model for plug-flow anaerobic digesters. *Transactions of the ASABE*, 48, 777-785 (2005).
7. B. Wu, E.L. Bibeau. Development of 3-D anaerobic digester heat transfer model for cold weather applications. *Transactions of the ASABE*, 49, 749-757 (2006).
8. B. Wu, S. Chen. CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in anaerobic digester. *Biotechnology and Bioengineering*, 99, 700-711 (2008).
9. С.В. Сатьянов. Автореф. дисс. канд. тех. наук, ФГОУ ВПО РГАЗУ, Москва, 2011. 25 с.
10. О.В. Чеботарева, В.А. Сербин, Н.В. Колосова. Теплообмен с окружающей средой метантенка для сбраживания биомассы. *Вісник Донбаської національної академії будівництва і архітектури*, выпуск, 6, 86, 31 -36 (2010).
11. В.С. Вохмин. Автореф. дисс. канд. тех. наук, Ижевская ГСХА, Ижевск, 2012. 20 с.
12. М.М. Хамоков. Автореф. дисс. канд. тех. наук, КБГСХА им. В.М. Кокова, Нальчик, 2012. 19 с.
13. А.А. Землянка. Математическая модель гидродинамики и теплообмена в цилиндрическом ферментаторе биогазовой установки с погруженным в него цилиндрическим теплообменником // *Вопросы химии и химической технологии*, 1, 181 – 187 (2004).
14. Е.К. Вачагина, Ю.В. Караева. Математическая модель движения двухфазной газожидкостной среды в цилиндрическом ферментаторе биогазовой установки // *Альтернативная энергетика и экология*, 10, 79 – 84 (2009).
15. А.Г. Кудряшова. Автореф. дисс. канд. тех. наук, Ижевская ГСХА, Ижевск, 2011. 20 с.
16. Р.Г. Шаяхметов. Влияние конструкций циркуляционных устройств на интенсификацию работы метантенков // *Молодой ученый*, 5, 28, 113-116 (2011).
17. П. Жермейн. *Курс механики сплошных сред*. М.: Высшая школа, 1983, 399с.

© Е. К. Вачагина – д-р техн. наук, проф. каф. ПТЭ КГЭУ, evachagina@mail.ru; Г. Р. Халитова - ст. науч. сотр. лаб. ЭТПИЭ Исследовательского центра проблем энергетики КНЦ РАН; Ю. В. Караева – канд. техн. наук, науч. сотр. той же лаборатории; И. А. Трахунова – асп. КНИТУ, мл. науч. сотр. той же лаборатории.