ГИДРОДИНАМИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЭНЕРГЕТИКА

УДК 66.048.37

С. В. Анаников

ТЕПЛООТДАЧА ОТ ЖИДКОСТИ, ПЕРЕМЕЩАЕМОЙ В БЕСКОНЕЧНО-ПРОТЯЖЕННОМ РАДИАЛЬНО-РАСХОДЯЩЕМСЯ КАНАЛЕ

Ключевые слова: температурное поле, удельный тепловой поток, радиально-расходящийся канал, краевая задача, собственные значения, собственные функци, бесселевы функции.

Решается задача Дирихле для установившегося потока нагретой жидкости перемещаемого в бесконечно-протяженном радиально-расходящемся канале. Записывается уравнение теплообмена в движущейся среде (уравнение Фурье) в цилиндрических координатах. Учитываются симметрия канала относительно оси z, перенос тепла теплопроводностью и конвекцией в направлении оси r и теплопроводностью вдоль оси z. В результате получены соотношения для расчета температурного поля и локальных удельных тепловых потоков на стенки канала. Решения выражаются с помощью тригонометрических, экспоненциальных и бесселевых функций. Использованы бесселевы функции второго рода действительного и мнимого аргументов дробного порядка.

Keywords: temperature field, specific stream of heat, radial-divergency canal, boundary task, characteristic numbers, characteristic functions, bessel`s functions.

Dirichlet`s task is solved for stable of hot liquid stream traveled into infinitely large lenth radial-divergency canal. Are written equation heatchange for moving of liquid (Furie`s equation) and equation of continuity in cilindric coordinates. Is taken in consideration the canal simmetration along axis z, heatexchange heatconduction and convection along axis r and by heatconduction along axal z. In result were obtained correlations for calculation of temperature field and local heat streams on the walls of canal. The solutions were writen by trigonometric and exponential and bessel`s function. Is used bessel`s functions second kind real and staginary arguments broken number of order.

Данная статья посвящена изучению теплоотдачи при стационарном течении теплоносителя через бесконечно-протяженный радиально-расходящийся канал при граничных условиях первого рода. Она продолжает серию работ [1-5] по изучению теплообмена при протекании теплоносителя в каналах различной формы и отличающихся условиях на границах.

Актуальность решаемых задач обоснована в вышеуказанных опубликованных работах.

Здесь решается та же задача, что и в [5], однако в качестве исходного принимается дифференциальное уравнение, учитывающее перенос тепла в радиальном направлении r не только конвекцией, но и теплопроводностью. Это позволит расширить диапазон применимости полученных результатов и оценить влияние теплопроводности на точность вычислений в различных условиях.

Постановка задачи идентична постановке, приведенной в [5].

Исходным уравнением теплообмена является дифференциальное уравнение Фурье-Кирчгофа записанное в цилиндрических координатах [6]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+V_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=$$
$$=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right). \qquad (1)$$

где a^2 - коэффициент температуропроводности жидкости.

Уравнение неразрывности потока вязкой несжимаемой жидкости в этих же координатах

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{V_r}{r}=0. \qquad (2)$$

Уравнения (1), (2) для наших условий существенно упрощаются. Вследствие стационарности рассматриваемой задачи и осевой симметрии следует положить

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}\equiv 0,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi}=\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\equiv 0.$$

Кроме того, по условию $V_z\equiv 0,\ V_\varphi\equiv 0.$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}=0. \qquad (3)$$

Интегрирование (3) дает выражение для средней скорости жидкости в радиально-расходящейся плоском канале.

$$V_r=\frac{Q}{2\pi r l}. \qquad (4)$$

Теперь можно в окончательном виде записать дифференциальное уравнение теплообмена и сформулировать граничные условия задачи с учетом (4)

$$V_r \frac{\partial T(r,z)}{\partial r} = a^2\left(\frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,z)}{\partial r}\right),$$

$$R \le r < \infty, 0 \le z \le \ell, \quad (5)$$

где $V_r(r) = Q/2\pi r\ell = b^2/r$.

$$T(R,z) = T_\Gamma,\ \ 0 \le z \le l, \quad (6)$$

$$T(r,0) = T_{cm1},\ R \le r < \infty, \quad (7)$$

$$T(r,l) = T_{cm2},\ \ R \le r < \infty, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T(\infty,z)}{\partial r} = 0.\ 0 \le z \le \ell \quad (9)$$

Таким образом в направлении координаты r учитывается перенос теплоты как за счет конвекции, так и теплопроводности в то время как в направлении координаты z - только за счет теплопроводности в пограничном слое.

Принимается безразмерная температура

$$\theta(r,z) = \frac{T(r,z) - T_{cm2}}{T_\Gamma - T_{cm2}}. \quad (10)$$

Это приводит после учета (4) к краевой задаче

$$\frac{c^2}{r}\frac{\partial\theta(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial^2\theta(r,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\theta(r,z)}{\partial r^2},$$

$$R \le r < \infty, 0 \le z \le \ell, \quad (11)$$

где $c^2 = (b^2 - a^2)/a^2$,

$$\theta(R,z) = 1,\ 0 \le z \le \ell, \quad (12)$$

$$\theta(r,0) = \frac{T_{cm1} - T_{cm2}}{T_\Gamma - T_{cm2}} = \overline{T}, R \le r < \infty, \quad (13)$$

$$\theta(r,\ell) = 0,\ R \le r < \infty, \quad (14)$$

$$\frac{\partial\theta(\infty,z)}{\partial r} = 0.\ 0 \le z \le \ell. \quad (15)$$

Редуцирование (расщепление) (11) - (15) дает

$$\theta(r,z) = \theta_1(r,z) + \theta_2(r,z). \quad (16)$$

Это позволяет прийти к двум краевым задачам для уравнений в частных производных, разрешимым методом разделения переменных

$$\frac{c^2}{r}\frac{\partial\theta_1(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial^2\theta_1(r,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\theta_1(r,z)}{\partial r^2},$$

$$R \le r < \infty,\ 0 \le z \le \ell, \quad (17)$$

$$\theta_1(R,z) = 1,\ 0 \le z \le \ell, \quad (18)$$

$$\theta_1(r,\ell) = 0,\ R \le r < \infty, \quad (19)$$

$$\theta_1(r,0) = 0, R \le r \le \infty, \quad (20)$$

$$\frac{\partial\theta_1(\infty,z)}{\partial r} = 0.\ 0 < z < \ell. \quad (21)$$

$$\frac{c^2}{r}\frac{\partial\theta_2(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial^2\theta_2(r,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\theta_2(r,z)}{\partial r^2},$$

$$R \le r < \infty,\ 0 \le z \le \ell, \quad (22)$$

$$\theta_2(R,z) = 1,\ 0 \le z \le \ell, \quad (23)$$

$$\theta_2(r,\ell) = 0,\ R \le r < \infty, \quad (24)$$

$$\theta_2(r,0) = \overline{T},\ R \le r < \infty, \quad (25)$$

$$\frac{\partial\theta_2(\infty,z)}{\partial r} = 0,\ 0 \le z \le \ell. \quad (26)$$

После разделения переменных в (17) - (21) с помощью функции

$$\theta_1(r,z) = U(r)\cdot Z(z). \quad (27)$$

получаются две краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r^2U''(r) - c^2rU'(r) - \varepsilon^2r^2U(r) = 0, \quad (28)$$

$$U(R) = 1, \quad (29)$$

$$\frac{dU(\infty)}{dr} = 0; \quad (30)$$

$$Z''(z) + \varepsilon^2 Z(z) = 0, \quad (31)$$

$$Z(\ell) = 0, \quad (32)$$

$$Z(0) = 0. \quad (33)$$

Здесь ε^2 - константа разделения.

Решение дифференциального уравнения (28) выражается через бесселевы функции мнимого аргумента первого и второго рода порядка ν [7]

$$U(r) = r^\nu[c_1 I_\nu(\varepsilon r) + c_2 K_\nu(\varepsilon r)],$$

где $\nu = \frac{1+c^2}{2} = \frac{b^2}{2a^2}$.

Для удовлетворения граничному условию на бесконечности (30) следует положить $c_1 = 0$, так как $I_\nu(\lambda r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Тогда для функции

$$U(r) = c_2 r^\nu K_\nu(\varepsilon r)$$

необходимо удовлетворить условию (29). В итоге получено

$$U(r) = \frac{r^\nu K_\nu(\varepsilon r)}{R^\nu K_\nu(\varepsilon R)}. \quad (34)$$

Решение краевой задачи (31) - (33) будет

$$Z_m(z) = c_m \sin\varepsilon_m z = c_m \sin\frac{\pi m z}{\ell}, \quad (35)$$

где $m = 1,2,3,...$.

Таким образом общее решение задачи (17) - (21) согласно (27), (34), (35), с учетом того, что $\varepsilon = \varepsilon_m$, имеет вид

$$\theta_1(r,z) = \frac{r^\nu}{R^\nu}\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{K_\nu\left(\frac{\pi m r}{\ell}\right)}{K_\nu\left(\frac{\pi m R}{\ell}\right)} sin\frac{\pi m z}{\ell}. \quad (36)$$

Следует заметить, что при решении краевой задачи (31) - (33) из характеристического уравнения было получено $m = 0,1,2,3,...$. Однако в (35), (36) принято $m = 1,2,3,...$. Это связано со следующим: во-первых при $m = 0$ получается тривиальное решение для функции (35) не несущее какой-либо дополнительной информации; во-вторых, при $m = 0$ функция $K_\nu\left(\frac{\pi m r}{\ell}\right)$ равна бесконечности, поэтому $m \ne 0$.

Применение к (36) граничного условия (18) приводит к выражению

$$1=\sum_{m=1}^{\infty} c_m \, sin\frac{\pi\, m\, z}{\ell}.$$

Разложение единицы в ряд по синусам дает

$$c_m=\frac{\int\limits_0^{\ell} sin\frac{\pi\, m\, z}{\ell}dz}{\int\limits_0^{\ell} sin^2\frac{\pi\, m\, z}{\ell}dz}=\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^m}{m}, \qquad (37)$$

где принято $cos\,\pi m=(-1)^m$ при $m=1,2,3,...$.

Окончательно, выражение для $\theta_1(r,z)$ запишется так

$$\theta_1(r,Z)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m}\times$$

$$\times\frac{K_\nu\left(\frac{\pi\, m\, r}{\ell}\right)}{K_\nu\left(\frac{\pi\, m\, R}{\ell}\right)}\sin\frac{\pi\, m\, z}{\ell}. \qquad (38)$$

Задача (22) - (26) решается также методом разделения переменных. Однако здесь при разделении возникают некоторые нюансы. Поэтому для пояснения здесь приводится сама процедура разделения.

Принимается

$$\theta_2(r,z)=U(r)Z(z). \qquad (39)$$

Подстановка (39) в (22) приводит к выражению

$$-\frac{U''(r)}{U(r)}+\frac{c^2}{r}\frac{U'(r)}{U(r)}=\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\varepsilon^2,\ \varepsilon^2>0, \varepsilon>0.$$

Здесь после разделения переменных берется постоянная разделения ε^2 , а не - ε^2 , как общепринято.

В противном случае задачу решить не удалось бы так как задача свелась бы к нахождению корней бесселевой функции $K_\nu(\varepsilon,r)$, которая, как известно, не имеет положительных корней [8]. Это привело бы, в конечном счете, к вычислению бесселевой функции $K_\nu(\varepsilon,r)$ от отрицательного аргумента, что невозможно, поскольку ν имеет не целое, а дробное значение. Другими словами возведение отрицательного числа в дробную степень невозможно, поскольку, как известно, функции Бесселя представляют из себя ряды по степеням аргумента.

Итак, в результате разделения переменных получаются две краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$r^2U''(r)-c^2rU'(r)+\varepsilon^2r^2U(r)=0, \qquad (40)$$

$$U(R)=0, \qquad (41)$$

$$\frac{dU(\infty)}{dr}=0. \qquad (42)$$

$$Z''(z)-\varepsilon^2Z(z)=0, \qquad (43)$$

$$Z(\ell)=0, \qquad (44)$$

$$Z(0)=\overline{T}. \qquad (45)$$

Общее решение дифференциального уравнения выражается через бесселевы функции действительного аргумента

$$U(r)=r^{\nu}[c_1J_\nu(\varepsilon r)+c_2Y_\nu(\varepsilon r)], \qquad (46)$$

где $\nu=\frac{1+c^2}{2}=\frac{b^2}{2a^2}$.

Удовлетворяя условию (41) следует в (46) положить $c_1=0$.

Из условия (41) вытекает далее, что $Y_\nu(\varepsilon_n R)=0,$ поскольку $c_2\neq 0,\ R^{\nu}\neq 0.$

Тогда решение краевой задачи (40) - (42) будет

$$U_n(r)=c_n r^{\nu}\, Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R}), \qquad (47)$$

где $\mu_n=\varepsilon_n R.$

Решением краевой задачи (43) - (45), с учетом выражения для ε_n предыдущей задачи, будет

$$Z_n(z)=\frac{\overline{T}}{exp\left(\frac{2\mu_n\ell}{R}\right)-1}\left\{exp\left[\frac{\mu_n(2\ell-z)}{R}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left(\frac{\eta_n z}{R}\right)\right\}. \qquad (48)$$

На основании (39), (47), (48) получено

$$\theta_2(r,z)=\overline{T}\, r^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}c_nY_\nu\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\frac{\exp\left[\frac{\mu_n(2\ell-z)}{R}\right]-\exp\left(\frac{\mu_n z}{R}\right)}{\exp\left(\frac{2\mu_n\ell}{R}\right)-1}. \qquad (49)$$

Теперь остается удовлетворить последнему граничному условию (25) и найти коэффициенты c_n

$$\frac{1}{r^{\nu}}=\sum_{n=1}^{\infty}c_nY_\nu(\mu_n\frac{r}{R}). \qquad (50)$$

Таким образом необходимо разложить функцию $\frac{1}{r^{\nu}}$ в ряд по функциям Бесселя.

Умножение обеих частей (50) на $r\,Y_\nu(\mu_k\frac{r}{R})$ и интегрирование в пределах от R до ∞ дает

$$\int\limits_R^{\infty} r\frac{1}{r^{\nu}}Y_\nu(\mu_k\frac{r}{R})dr=$$

$$=\int\limits_R^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_n r\,Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})Y_\nu(\mu_k\frac{r}{R})dr. \qquad (51)$$

Предполагая возможность почленного интегрирования разложения, стоящего в правой части (51), при условии его абсолютной сходимости, можно записать

$$\int_R^\infty r\frac{1}{r^\nu}Y_\nu(\mu_k\frac{r}{R})dr =$$

$$\sum_{n=1}^\infty \int_R^\infty c_n r Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})Y_\nu(\mu_k\frac{r}{R})dr. \qquad (52)$$

Доказательство ортогональности бесселевых функций $Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})$ и $Y_\nu(\mu_k\frac{r}{R})$ с весом r на интервале (r,∞) выполнено автором данной статьи, но, вследствие громоздкости, здесь не приводится. Поэтому все интегралы в правой части (52) за исключением случая, когда $n=k$, будут равны нулю и коэффициенты c_n, вынесенные за знак интеграла находятся из выражения

$$c_n = \frac{\int_R^\infty r\frac{1}{r^\nu}Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})dr}{\int_R^\infty rY_\nu^2(\mu_n\frac{r}{R})dr}. \qquad (53)$$

Согласно [9]

$$\int_R^\infty \frac{Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})}{r^{\nu-1}}dr = \frac{1}{R^{\nu-2}\mu_n}Y_{\nu-1}(\mu_n).$$

Вычисление интеграла в знаменателе выражения (53) представляет сложную, рутинную процедуру и здесь не приводится. Выполненная автором статьи процедура вычисления позволила получить

$$\int_R^\infty rY_\nu^2(\mu_n\frac{r}{R})dr = -\frac{R^2}{2}Y_{\nu+1}^2(\mu_n).$$

В результате можно записать

$$c_n = -\frac{2Y_{\nu-1}(\mu_n)}{R^\nu\mu_n Y_{\nu+1}^2(\mu_n)}. \qquad (54)$$

Поэтому выражение (49) с учетом (54) приобретает окончательный вид

$$\theta_2(r,z) = -2\overline{T}\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{n=1}^\infty \frac{Y_{\nu-1}(\mu_n)}{\mu_n Y_{\nu+1}^2(\mu_n)}Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})\times$$

$$\times\frac{exp\left[\frac{\mu_n(2\ell-z)}{R}\right]-exp(\frac{\mu_n z}{R})}{exp(\frac{2\mu_n\ell}{R})-1}, \qquad (55)$$

где корни μ_n находятся из характеристического уравнения $Y_\nu(\mu_n)=0,\ \lambda_n=\frac{\mu_n}{R}$.

Таким образом общее решение задачи (11) - (15), а следовательно, и задачи (5) - (9), на основании (10), (16), (38) и (55) имеет вид

$$\theta(r,z) = \frac{T(r,z)-T_{cm2}}{T_\Gamma - T_{cm2}} = \theta_1(r,z)+\theta_2(r,z) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{m=1}^\infty \frac{1-(-1)^m}{m}\frac{K_\nu(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_\nu(\frac{\pi m R}{\ell})}\sin\frac{\pi m z}{\ell} -$$

$$-2\overline{T}\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{n=1}^\infty \frac{Y_{\nu-1}(\mu_n)}{\mu_n Y_{\nu+1}^2(\mu_n)}Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})\times$$

$$\times\frac{exp\left[\frac{\mu_n(2\ell-z)}{r}\right]-exp(\frac{\mu_n z}{R})}{exp(\frac{2\mu_n\ell}{R})-1}. \qquad (56)$$

Или в развернутом виде с учетом выражения для $\overline{T}$

$$T(r,z) = T_{cm2}+\frac{2}{\pi}(T_\Gamma - T_{cm2})\left(\frac{r}{R}\right)^\nu\times$$

$$\times\sum_{m=1}^\infty \frac{1-(-1)^m}{m}\frac{K_\nu(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_\nu(\frac{\pi m R}{\ell})}\sin\frac{\pi n z}{\ell} -$$

$$-2(T_{cm1}-T_{cm2})\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{n=1}^\infty \frac{Y_{\nu-1}(\mu_n)}{\mu_n Y_{\nu+1}^2(\mu_n)}\times$$

$$\times Y_\nu(\mu_n\frac{r}{R})\frac{exp\left[\frac{\mu_n(2\ell-z)}{R}\right]-exp(\frac{\mu_n z}{R})}{exp(\frac{2\mu_n\ell}{R})-1}. \qquad (57)$$

Удельные тепловые потоки на соответствующие стенки канала будут

$$q\big|_{z=\ell} = -\lambda_{ж}\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=\ell} = \frac{2\lambda_{ж}(T_\Gamma - T_{cm2})}{\ell}\times$$

$$\times\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{m=1}^\infty \left[1-(-1)^m\right]\frac{K_\nu(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_\nu(\frac{\pi m R}{\ell})} -$$

$$-\frac{4\lambda_{ж}(T_{cm1}-T_{cm2})}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{n=1}^\infty \frac{Y_{\nu-1}(\mu_n)}{Y_{\nu+1}^2(\mu_n)}\times$$

$$\times Y_\nu(\frac{\mu_n r}{R})\frac{exp(\frac{\mu_n\ell}{R})}{exp(\frac{2\mu_n\ell}{R})-1}. \qquad (58)$$

$$q\big|_{z=0} = \lambda_{ж}\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{2\lambda_{ж}(T_\Gamma - T_{cm2})}{\ell}\times$$

$$\times\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{m=1}^\infty \left[1-(-1)^m\right]\frac{K_\nu(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_\nu(\frac{\pi m R}{\ell})} +$$

$$+\frac{2\lambda_{ж}(T_{cm1}-T_{cm2})}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{n=1}^\infty \frac{Y_{\nu-1}(\mu_n)}{Y_{\nu+1}^2(\mu_n)}\times$$

$$\times Y_\nu(\frac{\mu_n r}{R})\frac{exp(\frac{2\mu_n\ell}{R})+1}{exp(\frac{2\mu_n\ell}{R})-1}. \qquad (59)$$

В случае, если $T_{cm1} = T_{cm2} = T_{cm}$, $\overline{T} = 0$, то решения (56) - (59) упрощаются

$$\theta(r,z) = \frac{T(r,z) - T_{cm}}{T_{\Gamma} - T_{cm}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^m}{m} \frac{K_{\nu}(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_{\nu}(\frac{\pi m R}{\ell})} \sin\frac{\pi m z}{\ell}; \qquad (56a)$$

$$T(r,z) = T_{cm} + \frac{2}{\pi}(T_{\Gamma} - T_{cm})\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^m}{m} \frac{K_{\nu}(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_{\nu}(\frac{\pi m R}{\ell})} \sin\frac{\pi m z}{\ell}; \qquad (57a)$$

$$q\big|_{z=\ell} = \frac{2\lambda_{ж}(T_{\Gamma} - T_{cm})}{\ell}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^m\right] \frac{K_{\nu}(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_{\nu}(\frac{\pi m R}{\ell})}; \qquad (58a)$$

$$q\big|_{z=0} = \frac{2\lambda_{ж}(T_{\Gamma} - T_{cm})}{\ell}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^m\right] \frac{K_{\nu}(\frac{\pi m r}{\ell})}{K_{\nu}(\frac{\pi m R}{\ell})}. \qquad (59a)$$

Обозначения

r, z - радиальная и аксиальная координаты цилиндрической системы координат, м;

$T(r,z)$ -текущая температура жидкости, К ;

T_{Γ} - постоянная температура горячей жидкости на входе в канал $(r = R)$, К ;

T_{cm1}, T_{cm2} - постоянные температуры нижней и верхней стенок канала, обращенных к жидкости, соответственно, К;

T_{cm} - постоянная температура одинаковая для обеих стенок канала, обращенных к жидкости, К;

V_r, V_z, V_{φ} , - радиальная, осевая и тангециальная компоненты скорости жидкости, м/с;

R - внутренний радиус штуцера на входе в канал, м;

Q - объемный расход жидкости, м^3/с;

a^2 - коэффициент температуропроводности, м^2/с;

l - ширина канала, м;

b^2 - константа, м^2/с;

q - удельный тепловой поток, Вт/ м^2 ;

$\lambda_{ж}$ - теплопроводность жидкости, Вт/(м К);

τ - время, с;

ε^2 - константа разделения; 1/ м^2 ;

$\pi = 3{,}14159...$;

$I_{\nu}(\varepsilon r)$ - бесселева функция первого рода мнимого аргумента порядка ν ;

$K_{\nu}(\varepsilon r), K_{\nu}(\frac{\pi m r}{\ell}), K_{\nu}(\frac{\pi m R}{\ell})$ - бесселевы функции второго рода мнимого аргумента порядка ν ;

$J_{\nu}(\varepsilon r)$ - бесселева функция первого рода действительного аргумента порядка ν ;

$Y_{\nu}(\varepsilon r), Y_{\nu}(\mu_n \frac{r}{R})$ - бесселевы функции второго рода действительного аргумента порядка ν .

Литература

1. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, В.П. Бурдиков, Э.В. Чиркунов, Теоретические основы химической технологии (ТОХТ), **38**, 6, 655-660 (2004).
2. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 42-46 (2012).
3. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 147-150 (2012).
4. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 11, 143-145 (2012).
5. С.В. Анаников, Вестник Вестник Казанского технологического университета, **15**, 14, 90-92 (2012).
6. А.В. Лыков, Тепломассообмен: справочник. Энергия, Москва, 1978. 408 с.
7. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, Москва, 1976. 576 с.
8. Г.Н. Ватсон, Теория бесселевых функций. Часть 1. Иностранная литература, Москва, 1949. 798 с.
9. И.М. Рыжик, И.С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ. Москва-Ленинград, 1951. 464 с.

© С. В. Анаников - д-р техн. наук, проф. каф. химической кибернетики КНИТУ; ananikovsv@rambler.ru.