УДК 539.3:517.972

Н. Н. Рено, А. К. Сафиуллина

СВОБОДНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА НА БАЗЕ ФУНКЦИОНАЛА ЛАГРАНЖА ПРИ ЗАДАНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ключевые слова: минимизация энергозатрат, математическая модель, функционал Лагранжа, вариация перемещений, кинематическая граница, стационарность функционала.

Если граничные условия для аргумента функционала Лагранжа заданы, то это значит, что объем, в котором протекает моделируемый процесс, зафиксирован внешними связями, формирующими эти граничные условия. Множество аргументов функционала Лагранжа, тождественно удовлетворяющих заданным граничным условиям, позволяет найти такие функции, на которых энергетика процесса, моделируемого этим функционалом, может достигать минимума.

Keywords: minimization of energy consumption, mathematical model, functional of Lagrang, variation of movings, kinematic border, functional extremum.

If boundary conditions for argument of a functional of Lagrang are set, it means that the volume in which modelled process proceeds, is fixed by the external relations forming these boundary conditions. The set of arguments of a functional of Lagrang which are identically satisfying set boundary conditions, allows to find such functions on which the power of the process modelled by this functional, can reach a minimum.

Введение

Статья, как и предыдущие статьи [1,2,3], посвящена теоретическому научно-исследовательскому направлению по реализации идеи о *построении математической модели процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергетических затрат моделируемого процесса природы*. В качестве демонстрационного объекта моделирования выбран достаточно хорошо изученный природный процесс «деформация-напряжение».

В статье [2] представлены разновидности функционала Лагранжа, которые могут быть пригодны для моделирования процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергозатрат.

1. Функционал Лагранжа

Рассмотрим процедуру постановки *краевой задачи для поиска компонент моделируемого процесса* с позиции одной из этих разновидностей – функционала Лагранжа в геометрически возможных перемещениях $\Lambda[\breve{u}]$ (формула (8а) [2]):

$$\Lambda[\breve{u}] \equiv \iiint W_\varepsilon(\breve{\varepsilon}^u)dV - \left(\iiint \rho g_i \breve{u}_i dV + \iint \breve{u}_i p_i^s dS_p\right). \quad (1.1)$$

Этот функционал является объектом вариационного принципа Лагранжа, который позволяет подобрать лучшую аппроксимацию из имеющегося арсенала аппроксимации аргументов функционала Лагранжа [4].

Аргументами функционала (1.1) являются геометрически возможные перемещения $\breve{u}_i$:

$$\breve{u}_i - u_i^s \equiv 0, \; x \in S_u. \quad (1.2)$$

Здесь S_u - *кинематическая граница*, где задаются кинематические связи, формирующие внешние перемещения $u_i^s(x)$, которые входят в состав граничных условий (1.2). *На статической границе* S_p задается внешняя поверхностная нагрузка $p_i^s(x)$.

Для лучшей наглядности действий обратимся к одномерному пространству и рассмотрим простейший процесс «деформация-напряжение» на примере растягиваемого стержня (рис.1).

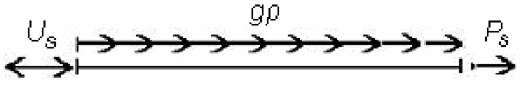

Рис. 1 – Схема внешних воздействий

Для рассматриваемой задачи функционал (1.1) и тождественно выполненные геометрические граничные условия (1.2) упростятся к виду:

$$\Lambda[\breve{u}] \equiv \int_0^L \left(W_\varepsilon(\breve{\varepsilon}^u) - \breve{u}(x) g\rho\right) F dx - \left.\breve{u}(x)\right| P_s{}_{x=L}, \quad (1.3)$$

$$\breve{u}(x) - U_s = 0, \; x = 0, \quad (1.4)$$

здесь L – длина стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, U_s и P_s – внешние перемещения и внешняя растягивающая сила, заданные на кинематической границе (S_u) $x = 0$ и статической границе (S_p) $x = L$ соответственно.

Для линейного процесса «напряжение-деформация», когда его компоненты линейно связаны друг с другом, деформация ε и удельная потенциальная энергия деформаций $W_\varepsilon(\breve{\varepsilon}^u)$ максимально упрощаются к виду соответственно:

$$\breve{\varepsilon}^u \equiv d\breve{u}(x)/dx \equiv \breve{u}'(x) \equiv \breve{u}', \quad (1.5)$$

$$W_\varepsilon(\breve{\varepsilon}^u) \equiv E\left(\breve{u}'(x)\right)^2/2. \quad (1.6)$$

2. Постановка вариационной задачи

Выявим *стационарные функции* функционала (1.3) $\Lambda[\breve{u}]$ при условии, что его аргументы *предварительно* удовлетворяют уравнению (1.4). Предварительное выполнение тождеств (1.4) означает, что задача ставится без каких-либо предварительных, дополнительных и прочих условий для аргументов $\breve{u}(x)$ рассматриваемого функционала

(1.3) $\Lambda[\breve{u}]$.

Руководствуясь *определением стационарных функций* как функций, на которых первая вариация равна нулю [5], составим первую вариацию функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3), выполним интегрирование по частям и получившийся результат приравняем нулю. Получим вариационное уравнение:

$$\delta\Lambda[\breve{u}] \equiv -\int_0^L \delta u\left(\frac{d}{dx}\left(EF\frac{d\breve{u}}{dx}\right)+g\rho F\right)dx +$$

$$+\delta u\left(EF\frac{d\breve{u}}{dx}-P_S\right)\Big|_{x=L} - \left(EF\frac{d\breve{u}}{dx}\delta u\right)\Big|_{x=0} = 0\,, \quad (2.1)$$

из которого формируют систему уравнений Эйлера-Лагранжа для поиска стационарных функций функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3).

Варьируемые внутренние перемещения $u(x)$ неизвестны как внутри области интегрирования $0\le x\le L$, так и на кинематической границе $x = 0$; поэтому вариации δu принимаем:

$$\delta u(x) \neq 0,\ 0 \le x \le L; \qquad \delta u(x) \equiv 0,\ x = L. \quad (2.2)$$

Но на кинематической границе $x = 0$ граничные условия для аргументов функционала (1.3) известны и тождественно выполнены по условию задачи. Поэтому вариацию δu на этой границе отождествляем с нулем [6, стр.19]:

$$\delta u(x) \neq 0,\ 0 \le x \le L;\ \delta u(x) \equiv 0,\ x = 0. \quad (2.3)$$

Учитывая (2.2), (2.3), из уравнения (2.1) вытекают два уравнения в составе системы уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3):
внутри объема:

$$\frac{d}{dx}\left(EF\frac{d\breve{u}}{dx}\right)+ g\rho F = 0, \quad 0 \le x \le L\ ; \quad (2.4а)$$

на статической границе:

$$EF\frac{d\breve{u}}{dx}-P_S=0,\ \ x=L\,. \quad (2.4б)$$

Уравнения (2.4а,б) системы совпадают с известными уравнениями равновесия в перемещениях внутри объема и на статической границе $x = L$. Обратим внимание на отсутствие требования равновесия на кинематической границе $x = 0$.

Решая систему (2.4а,б), получим множество стационарных функций $v(x)$ функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3):

$$v(x,C) = C + \frac{P_S}{EF}x + \frac{g\rho L}{E}\left(1-\frac{x}{2L}\right)x\,,$$

на которых, по определению стационарных функций [5], вариация этого функционала равна нулю:

$$\delta\Lambda[\breve{u}]\Big|_{\breve{u}(x)=v(x)} \equiv 0\,.$$

Из множества стационарных функций $v(x)$, различающихся на неопределенную константу C, выделим единственную:

$$v(x) = U_s + \frac{P_s}{EF}x + \frac{g\rho L}{E}\left(1-\frac{x}{2L}\right)x\,, \quad (2.5)$$

пользуясь свойством аргументов используемого функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3) тождественно удовлетворять заданным граничным условиям(1.4):

$$v(x,C)\Big|_{x=0} = U_S\,;\ \text{отсюда следует}\ C = U_s\,.$$

Итак, получили решение поставленной в п. 2 задачи: стационарная функция, на которой первая вариация функционала равна нулю, представлена формулой (2.5).

3. Величина и характер стационарности

Соответствующее стационарное значение $Stv\Lambda$ функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3) получим, подставляя стационарную функцию $v(x)$ [2.5] в функционал $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3):

$$\left(\Lambda[\breve{u}]\Big|_{\breve{u}=v} \equiv stv\Lambda\right) = -U_s F\left(g\rho L+P_s/F\right) -$$

$$- FL\left(\left(g\rho L\right)^2+3g\rho L(P_s/F)+3\left(P_s/F\right)^2\right)/(6E)\,. \quad (3.1)$$

Выявим характер стационарности функционала $\Lambda[\breve{u}]$, представляемого формулой (3.1).

Для этого подставим стационарную функцию $v(x)$ (2.5) функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3) в его вторую вариацию:

$$\delta^2\Lambda[\breve{u}]\Big|_{\breve{u}=v} \equiv -\int_0^L \delta^2 v\left(\frac{d}{dx}\left(EF\frac{dv}{dx}\right)+g\rho F\right)dx + \int_0^L EF\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 dx -$$

$$+\delta^2 v\left(EF\frac{dv}{dx}-P_s\right)\Big|_{x=L} - \left(EF\frac{dv}{dx}\delta^2 v\right)\Big|_{x=0}\,.$$

Стационарная функция $v(x)$ (2.5) является решением системы уравнений (2.4а,б), и потому обращает эту систему уравнений в систему тождеств:

$$\frac{d}{dx}\left(EF\frac{dv}{dx}\right)+ g\rho F \equiv 0, \quad 0 \le x \le L\,;$$

$$EF\frac{dv}{dx}-P_S\equiv0,\ \ x=L\,,$$

учитывая которую, в представленной выше второй вариации половина членов обернутся тождественными нулями; в результате выражение второй вариации упростится к виду:

$$\delta^2\Lambda[\breve{u}]\Big|_{\breve{u}=v} \equiv \int_0^L EF\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 dx - \left(EF\frac{dv}{dx}\delta^2 v\right)\Big|_{x=0}\,. \quad (3.2)$$

Рассмотри знак получившегося выражения.

На кинематической границе имеет место тождество (2.3): $\delta u(x) \equiv 0$ при $x = 0$, которое распространим и на вторую вариацию:

$$\delta^2 u \equiv 0\ \text{при}\ x = 0,$$

что позволит удалить выражение на кинематической границе $x = 0$ из состава второй вариации (3.2):

$$\delta^2\Lambda[\breve{u}]\Big|_{\breve{u}\equiv v(x)} \equiv \int_0^L EF\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 dx \quad (3.3)$$

Поскольку оставшийся интеграл всегда положителен, то всегда положительна вторая вариация (3.3) функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.3) на собственной стационарной функции этого функционала:

$$\delta^2\Lambda[\breve{u}]\Big|_{\breve{u}\equiv v(x)} > 0\,, \quad (3.4)$$

Положительный знак второй вариации (3.4) указывает на выполнение достаточного условия выпуклости вниз функционала $\Lambda[\breve{u}]$ (1.6), и потому на участке интегрирования $0 \le x \le L$ он имеет не более одного минимума [6, стр. 26].

Итак, если граничные условия для аргумента функционала Лагранжа заданы, то это значит, что объем, в котором протекает моделируемый процесс, зафиксирован внешними связями, которые формируют эти граничные условия. Множество аргументов функционала Лагранжа, тождественно удовлетворяющих заданным граничным условиям, позволяет найти такие функции, на которых энергетика процесса, моделируемого этим функционалом, может достигать минимума.

Литература

1. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 11, 65-68, (2012).
2. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 107-110, (2012).
3. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 111-114, (2012).
4. Р.Р.Губаев. *Изв.вузов. Авиационная техника*. №2. 66 – 68 (2008). R.R. Gubaev. *Russian Aeronautics*. **51**, 2. 205-208 (2008).
5. Р.Курант, Д.Гильберт. *Методы математической физики*: пер. с нем.в 2 т. Т.1. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1933. 525с.
6. Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*. Наука, Москва, 1978. 287с.

© **Н. Н. Рено** – канд. техн. наук, доц. каф. химической кибернетики КНИТУ, irinareno@mail.ru; **А. К. Сафиуллина** – канд. техн. наук, доцент той же кафедры.