УДК 539.3:517.972

Н. Н. Рено, А. К. Сафиуллина

О КАЧЕСТВЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ В ПРОБЛЕМЕ МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОЗАТРАТ МОДЕЛИРУЕМОГО ПРОЦЕССА

Ключевые слова: природный процесс, энергетика, энергетические компоненты, процесс «деформация-напряжение», кинематические ограничения, равновесие, математическая модель.

Достижение минимума энергетических затрат моделируемого процесса обеспечивается равновесием главного вектора внешних активных воздействий и одного из двух статических реактивных факторов: либо главного вектора внутренних равновесных реактивных напряжений, вышедших изнутри объема на кинематическую границу, либо главного вектора реакций кинематических связей, фиксирующих рассматриваемый объем в окружающем пространстве.

Keywords: natural process, power, power components, process "deformation tension", kinematic restrictions, balance, mathematical model.

Achievement of a minimum of power expenses of modelled process is provided with balance of the main vector of external active influences and one of two static jet factors: or the main vector of the internal equilibrium jet tension which has left from within of volume on kinematic border, or the main vector of reactions of the kinematic communications fixing the considered volume in surrounding space.

Статья, как и предыдущие статьи [1,2,3], посвящена теоретическому научно-исследовательскому направлению по реализации идеи о *построении математической модели процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергетических затрат моделируемого процесса природы*. В качестве демонстрационного объекта моделирования выбран достаточно хорошо изученный природный процесс «деформация-напряжение».

Технология формирования математической модели, основанной на минимизации энергетических затрат моделируемого процесса требует определиться с математическим качеством компонент этого процесса. Это требование относится, в частности, и для напряжения, одной из двух компонент изотермического процесса «деформация-напряжение», выбранного в качестве демонстрационного объекта моделирования.

Обсуждая в статье [3] проблему адекватности математической модели моделируемому процессу природы, исходным посылом проблемы моделирования принята *энергозатратность*, а еще конкретнее, идея Аристотеля, согласно которой все процессы в природе протекают с минимальными затратами.

В статье [1] представлены энергетически содержательные компоненты выбранного в качестве объекта естественного природного изотермического процесса «деформация-напряжение». Были представлены функции, характеризующие моделируемый процесс: деформации $\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{ji}$ и напряжения $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ji}$, которые формируют энергетические характеристики этого процесса:

– внутреннюю работу, *накопленную* внутренними деформациями (формула (5б), [1]): $A\varepsilon[\varepsilon]\cdot = \iiint W_\varepsilon dV > 0$,

– внутреннюю работу, *накопленную* внутренними напряжениями (формула (6б), [1]): $A\sigma[\sigma] \equiv \iiint W_\sigma dV > 0$,

– внутреннюю работу, *произведенную* внутренними напряжениями на соответствующих внутренних деформациях (формула (7б), [1]): $A_{\varepsilon\sigma}[\varepsilon,\sigma] \equiv \iiint(\varepsilon_{ij}\sigma_{ij})dV > 0$.

Причем, при переходе от исходного состояния к актуальному, эти энергетические характеристики процесса на множестве действительных состояний связаны тождеством (формула (8), [1]):

$$A\varepsilon[\varepsilon] + A\sigma[\sigma] - A_{\varepsilon\sigma}[\varepsilon,\sigma] \equiv 0\,.$$

Очевидно, что кроме требований достаточной гладкости, функции (деформации и напряжения), формирующие представленные выше энергетические характеристики моделируемого процесса $A_\varepsilon[\varepsilon]$, $A_\sigma[\sigma]$, $A_{\varepsilon\sigma}[\varepsilon,\sigma]$, должны удовлетворять еще некоторым требованиям, которые формируются в результате исследования природных качеств компонент моделируемого процесса, в частности деформацийε_{ij} и напряжений σ_{ij}.

Обратимся к напряжениям. Среди множества достаточно гладких напряжений, одной из двух составляющих моделируемого процесса, предлагается различать три качественно различных подмножества: равновесные только внутри деформируемого объема V, равновесные только на статической границе деформируемого объема V и равновесные почти всюду кроме кинематической границы деформируемого объема V.

Рассматривая проблему моделирования в Евклидовом пространстве с позиции механики И. Ньютона, мы уже можем сформулировать некоторое качественное представление о компонентах моделируемого процесса.

В этой статье рассмотрим механико-математическое качество напряжений, представленное соответствующими математическими формулами.

Законы механики И.Ньютона требуют равновесия, которое выполняется, если выполняются уравнения равновесия внутренних (реактивных) *достаточно гладких* напряжений σ_{ij} и внешних (активных) нагрузок: массовой ρg_i и поверхностной p_i^s:

$$\partial_j \sigma_{ji} + \rho g_i = 0, \quad x \in V, \qquad (1а)$$

$$\sigma_{ji} n_j - p_i^s = 0, \quad x \in S_p \qquad (1б)$$

здесь σ_{ij} – *достаточно гладкие* внутренние напряжения, одна из компонент моделируемого процесса «деформация-напряжение». Уравнения (1б) на статической границе S_p называют статическими граничными условиями.

На другой части S_u поверхности S (кинематическая граница) на деформируемый объем могут быть наложены *кинематические связи*.

Эти связи, во-первых, фиксируют деформируемый объем в окружающем пространстве и, во-вторых, формируют внешние перемещения u_i^s, которым *не обязаны удовлетворять внутренние перемещения* u_i на этой границе.

Итак, граничная поверхность S деформируемого объема V состоит их двух частей S_u и S_p, которые нормальным образом покрывают поверхность S:

$$S_p \cap S_u \equiv S; S_p \cup S_u \equiv \varnothing. \qquad (2)$$

Внутренние напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия (1а,б), определим как *статически возможные (равновесные) почти всюду*[1] *напряжения* и обозначим как $\breve{\hat{\sigma}}_{ji}$. Очевидно, что *на множестве статически возможных почти всюду напряжений* $\breve{\hat{\sigma}}_{ji}$ *представленная система уравнений обратится в систему тождеств*:

$$\partial_j \breve{\hat{\sigma}}_{ji} + \rho g_i \equiv 0, \quad x \in V, \qquad (3а)$$

$$\breve{\hat{\sigma}}_{ji} n_j - p_i^s \equiv 0, \quad x \in S_p \qquad (3б)$$

Среди множества достаточно гладких напряжений σ_{ij} можно выделить подмножество напряжений $\breve{\sigma}_{ji}$, *равновесных только внутри деформируемого объема* V:

$$\partial_j \breve{\sigma}_{ji} + \rho g_i \equiv 0, \quad x \in V, \qquad (4а)$$

$$\breve{\sigma}_{ji} n_j - p_i^s \neq 0, \quad x \in S_p \qquad (4б)$$

И, наконец, среди множества достаточно гладких напряжений σ_{ij} можно выделить подмножество напряжений $\hat{\sigma}_{ji}$, которые не удовлетворяют уравнениям равновесия внутри деформируемого объема V, но удовлетворяют статическим граничным условиям:

$$\partial_j \hat{\sigma}_{ji} + \rho g_i \neq 0, \quad x \in V, \qquad (5а)$$

$$\hat{\sigma}_{ji} n_j - p_i^s \equiv 0, \quad x \in S_p \qquad (5б)$$

Кроме напряжений, механико-математическое качество[2] которых описывается системами (3а,б), (4а,б), (5а,б), существует множество напряжений $\sigma^o_{ij} \equiv \sigma^o_{ji}$, которые удовлетворяют однородным уравнениям равновесия только внутри деформируемого объема:

$$\partial_{ji} \sigma^o_{ji} \equiv 0, \quad x \in V. \qquad (6)$$

Такие напряжения используются для формирования общих решений системы уравнений равновесия (1а,б) в соответствии с правилами решения дифференциальных уравнений (суперпозиция общего и частного решений). Различные варианты напряжений σ^o_{ij} (6) представлены А.В. Саченковым в статье [4].

Обратимся к равновесным почти всюду внутренним напряжениям $\breve{\hat{\sigma}}_{ji}$ и возьмем неопределенный интеграл от группы тождественно выполненных уравнений равновесия внутри деформируемого объема V (1б):

$$\iiint \left(\partial_j \breve{\hat{\sigma}}_{ji} + \rho g_i \right) dV \equiv 0. \qquad (7)$$

Обратившись к теореме Остроградского-Гаусса[3], имеем:

$$\iiint \partial_j \breve{\hat{\sigma}}_{ji} dV \equiv \iint \breve{\hat{\sigma}}_{ji} n_j dS.$$

В правой части выделим кинематическую S_u и статическую S_p части границы S в соответствии с (2); учтем в интеграле по статической границе S_p тождественное выполнение статических граничных условий (3б) и заменим внутренние реактивные напряжения $\breve{\hat{\sigma}}_{ji}$ внешней активной нагрузкой p_i^s. Тогда полученное интегральное тождество примет вид:

$$\iiint \partial_j \breve{\hat{\sigma}}_{ji} dV \equiv \iint \breve{\hat{\sigma}}_{ji} n_j dS_u + \iint p_i^s dS_p;$$

подставим получившийся результат в (7), получим:

$$\iint \breve{\hat{\sigma}}_{ji} n_j dS_u + \iint p_i^s dS_p + \iiint \rho g_i dV \equiv 0. \qquad (8)$$

В состав тождества (8) входят: два главных вектора внешних активных нагрузок:

$$Q_i^m \equiv \iiint \rho g_i dV \qquad (9а)$$

$$Q_i^p \equiv \iint p_i^s dS_p \qquad (9б)$$

и главный вектор внутренних реактивных статически возможных почти всюду (кроме кинематической границы S_u) напряжений $\breve{\hat{\sigma}}_{ji}$:

$$Q_i^u \equiv \iint \breve{\hat{\sigma}}_{ji} n_j dS_u, \qquad (9в)$$

выходящих изнутри деформируемого объема V *на кинематическую поверхность* S_u, где расположены кинематические связи, фиксирующие деформируемый объем V в окружающем его пространстве.

Тождество (8) *показывает уравновешенность суммы* P_i^{out} *главных векторов активных нагрузок* Q_i^m, Q_i^p:

$$P_i^{out} \equiv Q_i^m + Q_i^p \equiv \iiint \rho g_i dV + \iint p_i^s dS_p \qquad (9г)$$

и главного вектора Q_i^u (9в) внутренних реактивных статически возможных почти всюду напряжений $\breve{\hat{\sigma}}_{ji}$, вышедших на кинематическую поверхность (границу) S_u изнутри деформируемого объема. Учитывая обозначения (9в) и (9г) из тождества (8), получим тождество, представляющее уравновешенность *суммы* P_i^{out} (9г) *главных векторов активных нагрузок* Q_i^m, (9а), Q_i^p (9б) и главного вектора Q_i^u (9в):

$$Q_i^u + P_i^{out} \equiv 0. \qquad (10)$$

Тождество (10) является записью тождества (8) с учетом обозначений (9а,б,в,г) и оба демонстрируют *равновесие главного вектора внешних актив-*

---

[1] Кроме кинематической границы S_u.

[2] Далее вместо словосочетания «механико-математическое качество» используем одно слово «качество».

[3] Формула Остроградского-Гаусса; см., например, [5], формула (1.157).

ных нагрузок P_i^{out} (9г) *и главного вектора* Q_i^u (9в) *внутренних реактивных статически возможных почти всюду напряжений* $\breve{\bar{\sigma}}_{ji}$, *вышедших на кинематическую поверхность (границу)* S_u *изнутри деформируемого объема.*

Вместо главного вектора Q_i^u (9в) введем *главный вектор* R_i^u *реакций кинематических связей, расположенных на кинематической границе* S_u. По И.Ньютону вектор R_i^u уравновешивает главный вектор Q_i^u (9в) внутренних реактивных статически возможных почти всюду напряжений $\breve{\bar{\sigma}}_{ji}$:

$$R_i^u + Q_i^u \equiv 0\,,\, x^k \in S_u. \qquad (11)$$

Если, пользуясь тождеством (11), заменить главный вектор Q_i^u внутренних реактивных статически возможных почти всюду (кроме кинематической границы S_u) напряжений $\breve{\bar{\sigma}}_{ji}$ (9в) главным вектором реакций кинематических связей R_i^u (11), то из тождества (10) получим формулу равновесия главного вектора P_i^{out} внешних активных нагрузок и главного вектора R_i^u реакции кинематических связей:

$$P_i^{out} - R_i^u \equiv 0\,; \qquad (12)$$

тождество (12) *показывает самоуравновешенность внешних активных нагрузок и реакций кинематических связей.*

Представленные формулы учитывают наличие кинематической границы S_u, т.е. рассматривается равновесие объема, который зафиксирован в пространстве кинематическими связями, которые действуют на кинематической границе и ограничивают перемещение деформируемого объема в пространстве.

Следует обратить внимание на тот факт, что характер кинематических ограничений, задаваемых на кинематической границе S_u, в представленных выкладках не используется, т.е. не имеет значения.

В этом параграфе рассмотрим частный случай, когда на кинематической границе в качестве кинематических ограничений задана константа.

Пример: д**еформируемый объем зафиксирован в пространстве** кинематической связью на левом торце (схема рис. 1), которая сформировала внешнее перемещение $U_s \equiv Const.$, ограничивающее перемещение деформируемого стержня пространстве.

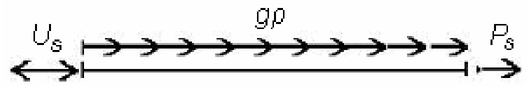

Рис. 1 – Схема внешних воздействий

В одномерном пространстве система уравнений равновесия (1а,б) упростится к виду:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma F\right) + g\rho F = 0,\ \ 0 \le x \le L\,; \qquad (13а)$$

$$\sigma F - P_s = 0,\ \ x = L\,, \qquad (13б)$$

который настолько прост, что позволяет получить аналитическое решение этой системы уравнений.

Для одномерного объекта вместо напряжений σ, которые распределены по площади F, используется усилие σF, распределенное по оси одномерного объекта, равное произведению напряжения σ на площадь F поперечного сечения, которому перпендикулярна эта ось.

Для этого возьмем неопределенный интеграл от уравнения (13а):

$$\int \frac{d}{dx}(\sigma F)dx + \int g\rho F dx = 0,\ \ 0 \le x \le L\,,$$

получим:

$$\sigma F + g\rho F x - C_1 = 0,\ \ 0 \le x \le L \qquad (14а);$$

отсюда выразим:

$$\sigma F = C_1 - g\rho F x\,. \qquad (14б).$$

Подставим (14б) в граничное условие (13б):

$$(C_1 - g\rho F x)\,\Big|_{x=L} - P_s = 0\,,$$

получим уравнение для определения константы C_1:

$$C_1 - g\rho F L - P_s \equiv 0\,,$$

отсюда найдем:

$$C_1 \equiv g\rho F L + P_s\,. \qquad (14в)$$

Подставим (14в) в (14а):

$$\sigma F + g\rho F(x - L) - P_s = 0,\ \ 0 \le x \le L \qquad (14г)$$

- получили уравнение для определения статически возможного (равновесного) почти всюду (кроме кинематической границы $x = 0$) внутреннего усилия σF.

Разрешая это уравнение относительно σF, получим:

$$\sigma F = F\breve{\bar{\sigma}},\ \ 0 \le x \le L\,,$$

где в правой части этого соотношения введено обозначение статически возможного (равновесного) почти всюду (кроме кинематической границы x = 0) внутреннего усилия $F\breve{\bar{\sigma}}$.

$$F\breve{\bar{\sigma}} \equiv g\rho F(L - x) + P_S\,,\ \ 0 \le x \le L\,. \qquad (14д)$$

Отсюда получим внутреннее усилие на левом торце ($x = 0$):

$$\breve{\bar{\sigma}}F\,\Big|_{x=0} \equiv \left(g\rho F(L - x) + P_s\right)\Big|_{x=0} \equiv g\rho F L + P_s\,. \quad (14е)$$

Из формулы (9в), учитывая (14д), получим величину главного вектора внутренних напряжений на кинематической границе:

$$Q_u \equiv \iint \breve{\bar{\sigma}}_{ji} n_j dS_u \equiv \left(\iint \breve{\bar{\sigma}} n\,\Big|_{n=-1} FdF \right)\Big|_{x=0} \equiv$$

$$\equiv -\breve{\bar{\sigma}}F\,\Big|_{x=0} \equiv -\left(g\rho F(L - x) + P_s\right)\Big|_{x=0} \equiv -\left(g\rho F L + P_s\right). \qquad (15а)$$

Из (11), учитывая (15а), получим главный вектор реакции кинематической связи:

$$R_u \equiv -Q_u \equiv \rho g L F + P_s\,. \qquad (15б)$$

Сравнивая внутреннее усилие на левом торце (14е) с формулами главного вектора внутренних напряжений на кинематической границе Q_u (15а) и главного вектора реакции кинематической связи R_u (15б), убеждаемся в равновесии (в совпадении внутренних и внешних силовых факторов) на кинематической границе $x = 0$:

$$F\breve{\bar{\sigma}}\,\Big|_{x=0} \equiv R_u \equiv -Q_u\,.$$

Из (9а) получим величину главного вектора массовой (по объему от $x = 0$ до $x = L$) нагрузки:

$$Q_m \equiv \iiint \rho g_i dV \equiv \int_0^L \left(\int F\rho g dF \right) dx \equiv$$

$$\equiv \rho g L F \left[\frac{кг}{м^3} * \frac{м}{с^2} * м * м^2 = \frac{кг}{1} * \frac{м}{с^2} = Н \right]; \qquad (15в)$$

Из (9б) получим величину главного вектора поверхностной (по площади правого торца $x = L$) нагрузки:

$$Q_p \equiv \iint p_i^s dS_p \equiv \iint (P_s / F) n \Big|_{n=+1} FdF \equiv P_s \, ; \qquad (15г)$$

Далее, подставляя (15в) и (15г) в (9г), получим главный вектор внешней (активной) нагрузки $g\rho$ и p_i^s:

$$P^{out} \equiv Q_m + Q_p \equiv \rho gLF + P_s \, . \qquad (15д)$$

Из (10) получим запись равновесия (самоуравновешенности) внешних активных нагрузок P^{out} (15д) и реакции внешней кинематической связи Q_u (15а):

$$Q_i^u + P_i^{out} \equiv \left(-(g\rho FL + P_s)\right) + \left(\rho gLF + P_s\right) \equiv 0 \, . \, (16а)$$

Далее, из (12) получим запись равновесия (самоуравновешенности) внешних активных нагрузок P_{out} (15д) и реакции внешней кинематической связи R_u (15б):

$$P_i^{out} - R_i^u \equiv \rho gLF + P_S - (g\rho FL + P_s) \equiv 0 \, . \qquad (16б)$$

Из (16а) и (16б) следует вывод:

при наличии кинематических ограничений, допускающих конечное перемещение деформируемого объема как твердого целого в процессе его деформирования, *равновесие, необходимое для применения законов И.Ньютона, обеспечивается самоуравновешенностью главного вектора внешних активных нагрузок, вызвавших моделируемый процесс «деформация-напряжение» и одного из двух статических реактивных факторов :*

– либо главного вектора ***внутренних равновесных реактивных напряжений, вышедших изнутри деформируемого объема на кинематическую границу*** (формула 16а)**,**

– либо *главного вектора* ***реакций кинематических связей, фиксирующих деформируемый объем в окружающем пространстве*** (формула 16б)**.**

Литература

1. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 11, 65-68, (2012).
2. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 107-110, (2012).
3. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 111-114, (2012).
4. А. В. Саченков, Э. Г. Сайфуллин, *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, **16**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1981, 36–41 .
5. Дж. Мейз. *Теория и задачи механики сплошных сред*: пер. с англ. Мир, Москва, 1974. 318с.

© **Н. Н. Рено** – канд. техн. наук, доц. каф. химической кибернетики КНИТУ, irinareno@mail.ru; **А. К. Сафиуллина** – канд. техн. наук, доцент той же кафедры.