

А. Н. Зиннатуллина, М. Н. Шамсиев, Е. Г. Шешуков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОД ГИДРОСООРУЖЕНИЕМ

Ключевые слова: гидросооружения, конвективно-диффузионный перенос, концентрация загрязнения.

В данной работе предлагается вычислительный алгоритм для моделирования процесса конвективно-диффузионного переноса вещества под гидросооружением. Исследуется зависимость процесса распространения концентрации от вида источника загрязнения.

Key words: hydro constructions, convective-diffusive transport, the concentration of pollution.

In this work the computing algorithm for modeling of process of convective and diffusive transfer of substance under a hydro construction is offered. Dependence of process of distribution on a type of a source of pollution of concentration is investigated.

Введение

В связи с интенсивным развитием промышленности и сельского хозяйства, увеличением различных антропогенных факторов на окружающую среду перед обществом возникает важная задача охраны водных ресурсов от загрязнения и засоления вредными веществами. Решение этой актуальной задачи в значительной мере зависит от результатов математического исследования процессов массопереноса мигрирующих веществ при фильтрации подземных вод и их взаимодействия с поверхностными водами.

Для предотвращения загрязнения и засоления окружающей среды вредными веществами определяют широкое строительство гидротехнических сооружений [1]. Они бывают различного назначения и строятся в разнообразных природных условиях, в частности, выполненные из грунтовых материалов водоподпорные сооружения (плотины, дамбы), которые перегораживают водоток и воспринимают напор воды.

В данной работе численно моделируется процесс распространения загрязнения под гидросооружением. Исследуются различные виды загрязнения.

1. Постановка задачи. Рассматривается река, перегороженная плотиной, для устойчивости которой строят противифльтрационные завесы. Из-за разностей уровней воды перед плотиной и за плотиной происходит фильтрация в обход гидросооружения. Откосы берегов считаются вертикальными, а угол наклона свободной поверхности очень малым, поэтому вводится допущение, что пьезометрический напор постоянен по высоте. Процесс переноса загрязнения под гидротехническим сооружением, подземный контур которого задан в виде полукруга (рис.1), описывается уравнением [2]:

$$D \left(\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 c}{r^2 \partial \theta^2} \right) - V_{\theta} \frac{\partial c}{r \partial \theta} - V_r \frac{\partial c}{\partial r} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$r \in [r_0, R], \theta \in [\pi, 2\pi], t \in (0, T], \quad (1)$$

с начальным

$$c(\theta, r, 0) = \varphi(\theta, r) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$c|_{\theta=\pi} = \varphi(r), \quad \frac{\partial c}{\partial \theta}|_{\theta=2\pi} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial r}|_{r=R} = 0, \quad (3)$$

где D – коэффициент диффузии, σ – активная пористость, AB – граница верхнего бьефа, CA – граница нижнего бьефа, r_0 радиус подземного контура, а составляющие скорости V_{θ} и V_r фильтрационных потоков под гидротехническим сооружением вычисляются следующим образом:

$$V_{\theta} = -k \frac{\partial h}{r \partial \theta}, \quad V_r = -k \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (4)$$

где h – действующий напор, k – коэффициент фильтрации.

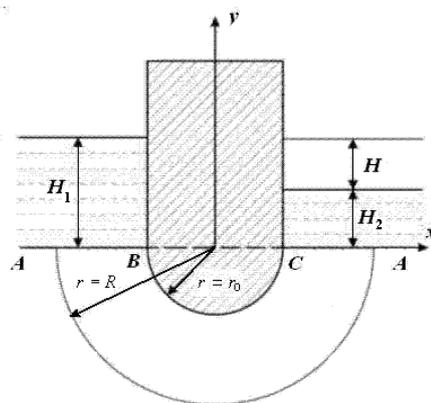


Рис. 1 – Схема гидротехнического сооружения

Установившееся движение воды под гидротехническим сооружением (рис.1) описывается уравнением:

$$\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$r \in [r_0, R], \theta \in [\pi, 2\pi], \quad (5)$$

с граничными условиями:

$$h|_{\theta=\pi} = H_1, \quad h|_{\theta=2\pi} = H_2,$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

2. Численное решение. Для численного решения системы (1) – (6) используется метод конечных разностей [3]. В области $z = \{\theta, r : \pi \leq \theta \leq 2\pi, r_0 \leq r \leq R\}$ вводится сетка узлов:

$$\bar{z}_h = \{(\theta_i, r_j) : \theta_i = i\bar{h}_\theta, i = \overline{0, M}; r_j = j\bar{h}_r,$$

$$j = \overline{0, N}, \bar{h}_\theta = \frac{\pi}{M-1}, \bar{h}_r = \frac{R-r_0}{N-1}\},$$

$$\bar{z}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, K}; 0 < t_n < T\} \text{ и полагается}$$

$$c_{i,j}^{n+1} = c(\theta_i, r_j, t_n), h_{ij} = h(\theta_i, r_j),$$

$$V_{ij}^\theta = V_\theta(\theta_i, r_j), V_{ij}^r = V_r(\theta_i, r_j).$$

Конечно-разностный аналог краевой задачи (1) – (5) имеет вид:

$$D \left[\frac{c_{i,j+1}^{n+1} - c_{ij}^{n+1}}{r_j \bar{h}_r} + \frac{c_{i,j+1}^{n+1} - 2c_{ij}^{n+1} + c_{i,j-1}^{n+1}}{\bar{h}_r^2} + \frac{c_{i+1,j}^{n+1} - 2c_{ij}^{n+1} + c_{i-1,j}^{n+1}}{r_j^2 \bar{h}_\theta^2} \right] -$$

$$- V_{ij}^\theta \frac{c_{ij}^{n+1} - c_{i-1,j}^{n+1}}{r_j \bar{h}_\theta} - V_{ij}^r \frac{c_{ij}^{n+1} - c_{i,j-1}^{n+1}}{\bar{h}_r} =$$

$$= \sigma \frac{c_{ij}^{n+1} - c_{ij}^n}{\tau}, \quad i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

$$c_{i,j}^0 = \varphi_{i,j}, \quad i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1}, \quad (8)$$

$$c_{0j}^{n+1} = \varphi_j, \quad c_{Mj}^{n+1} = c_{M-1,j}^{n+1}, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$c_{i0}^{n+1} = c_{i1}^{n+1}, \quad c_{iN}^{n+1} = c_{i,N-1}^{n+1},$$

$$i = \overline{1, M-1}, n = \overline{0, K}; \quad (9)$$

$$V_{ij}^\theta = -\frac{h_{i+1,j} - h_{ij}}{r_j \bar{h}_\theta}, \quad V_{ij}^r = -\frac{h_{i,j+1} - h_{ij}}{\bar{h}_r}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r_j} \cdot \frac{h_{i,j+1} - h_{ij}}{\Delta r} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{ij} + h_{i,j-1}}{\Delta r^2} +$$

$$+ \frac{1}{r_j^2} \cdot \frac{h_{i+1,j} - 2h_{ij} + h_{i-1,j}}{\Delta \theta^2} = 0, \quad (11)$$

$$h_{1,j} = H_1, h_{M,j} = H_2, \quad j = \overline{1, N-1};$$

$$h_{i,0} = h_{i,1}, h_{i,N-1} = h_{i,N}, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (12)$$

Система (7) и (12) решается итерационным методом [4].

3. Результаты расчетов. Рассматривается модельный пример, когда значение радиуса окружности R (рис.1), ограничивающей расчетную область снизу, выбирается таким образом, чтобы его значение не вносило погрешность в решение задачи.

Исходные данные: $D=0,1 \frac{M^2}{сут}$, $k=1,0 \frac{M}{сут}$,

$H_1 = 10 м$, $H_2 = 5 м$, $\sigma = 0,25$, $R=10 м$, $r_0 = 2 м$. В начальный момент времени ($t=0$) на границе верхнего бьефа AB концентрация загрязнения $c=1$, а в остальных точках физической плоскости $c=0$. На рис.2 приводится распространение концентрации на момент времени $T=15$ сут, полученное в ходе решения задачи (1)-(6). Для сравнения на рис.3 приводится распространение концентрации, полученного при помощи аппарата комплексного анализа [5].

Анализ результатов показал, что поля концентрации, полученные в области комплексного потенциала w и физической области z , согласуются качественно и количественно (расхождение значений концентрации в узлах сетки не более 2-3%).

В следующем примере моделируется выброс загрязнения из трубы. На границе $\theta = \pi$ условие $c=1$ выполняется лишь в трех узлах. Исходные данные приведены в первом примере. Результат расчета при $T=15$ сут приведен на рис.4. Из полученных результатов видно, что со временем загрязнение за счет конвективного и диффузионного переноса доходит до нижнего бьефа и ее концентрация в этой области увеличивается.

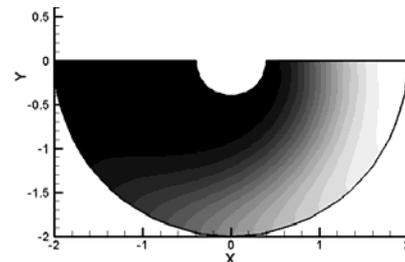


Рис. 2 - Поле концентрации в области $z(r, \theta)$ при $T=15$ сут

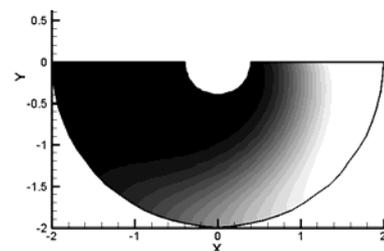


Рис. 3 - Поле концентрации в области $w(\varphi, \psi)$ при $T=15$ сут

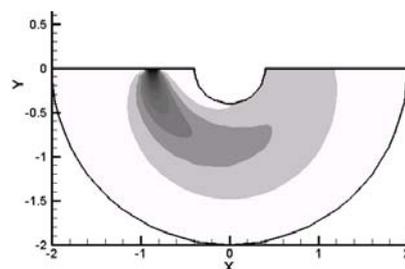


Рис. 4 - Поле концентрации. $T=15$ сут

Вывод

Разработан вычислительный алгоритм для моделирования процесса распространения загрязнения под гидросооружением при различных видах его источников.

Литература

1. М.М. Гришин. Гидротехнические сооружения. Стройиздат, Москва, 1962. 764 с.
2. Бэр Я., Заславский Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. Мир, Москва, 1971. 451с.
3. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Наука, Москва, 1971. 552 с.
4. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. Наука, Москва, 1978. 592 с.
5. Е.Г. Шешуков, А.Н. Зиннатуллина, К.П. Курцева. Метод расчета переноса загрязнений подземными водами // Известия ВУЗов «Проблемы энергетики». №11-12, 119-129 (2011).

© **А. Н. Зиннатуллина** – ст. препод. каф. прикладной информатики и математики КазГАУ, zinnatullina-alsu@mail.ru;
М. Н. Шамсiev – д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Института механики и машиностроения КазНЦ РАН, MShamsiev@yandex.ru;
Е. Г. Шешуков – д-р физ.-мат. наук, проф. каф. механики КФУ.