

УДК 624.07+539.3

А. Х. Валиуллин

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА
С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛКИ

Ключевые слова: упругопластический изгиб, диаграмма растяжения, линейно упрочняющееся тело, изменение поперечного сечения, потенциальная энергия деформации, работа внешних сил, дополнительная работа.

Рассмотрено влияние изменения поперечных размеров балки при упругопластическом изгибе на ее несущую способность и жесткость. Показано значительное снижение этих характеристик вследствие изменения поперечных размеров: по несущей способности около 20 процентов, по жесткости более чем в 1.5 раза.

Key words: Elasto-plastic-bending, stretching chart, material with linear hardening, change of cross section, the potential energy of deformation, work of external forces, the additional work.

Influence of change of the cross size in considered at an Elasto-plastic bend of a beam on its bearing ability and rigidity. Considerable decrease in these characteristics in shown: on durability about 20%, on rigidity it is more than by 1.5 times.

При исследовании малых, в том числе и упругопластических, деформаций обычно не принимают во внимание изменение размеров поперечного сечения, так как они очень малы и практически не влияют на результат. Примеры таких расчетов приведены в [1], [2].

В настоящей работе предпринята попытка расчета напряженно-деформированного состояния при чистом изгибе с учетом изменения размеров поперечного сечения. Защемленная одним концом консольная балка нагружена на свободном конце сосредоточенным моментом M . Поперечное сечение балки – прямоугольник $b \times h$, материал – сталь 20, диаграмма растяжения (рис 1) состоит из двух линейных участков: упругого, при: $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T$, и участка упрочнения, при $\varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B$, где ε - относительная продольная деформация, индексы соответствуют пределам текучести и прочности. Характеристики материала: $E = 200$ ГПа – модуль упругости, $\sigma_T = 300$ МПа и $\sigma_B = 600$ МПа – истинные пределы текучести и прочности, $E^* = (\sigma_B - \sigma_T) / \varepsilon_B = 1562,5$ МПа - модуль упрочнения.

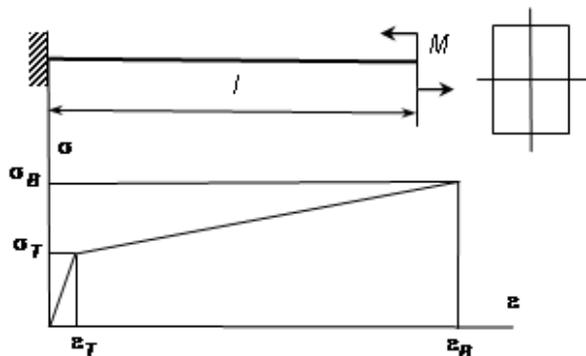


Рис. 1 – Схема нагружения и диаграмма растяжения

При расчете в упругой зоне поперечное сечение считается неизменным, изгибающий момент определяется как в работе [1], а в начале пластической зоны по упрощенной формуле

$$m = 1,5 + \bar{E}^* \varepsilon_{\max},$$

полученной с учетом малости отношений $\varepsilon_T / \varepsilon_B$ и $\varepsilon_T / \varepsilon_{\max}$. В этой формуле $\bar{E}^* = E^* / \sigma_T$ – безраз-

мерный модуль упрочнения, а $m = \frac{M_x}{\sigma_T W_x}$ – безразмерный изгибающий момент, $W_x = bh^2 / 6$ – момент сопротивления сечения.

Найдем выражение изгибающего момента в общем случае упругопластической деформации с учетом изменения размеров поперечного сечения. При этом, в связи с отсутствием диаграммы пластического сжатия, будем предполагать, что она центрально симметрична (относительно начала координат) диаграмме растяжения. Кроме того, учтем, что пластическое деформирование происходит без изменения объема, коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$. Ясно также, что в растянутой части балки поперечные размеры уменьшаются, а в сжатой – в том же отношении увеличиваются.

Как известно, изгибающий момент можно представить интегралом

$$M_x = \int_A \sigma y dA = 2 \int_0^{h/2} \sigma b^* y^* dy^*.$$

Здесь $\sigma = \sigma_T (1 + \bar{E}^* \varepsilon)$, звездочкой отмечены изменяющиеся размеры:

$$b^* = b(1 - \mu \varepsilon),$$

$$dy^* = dy(1 - \mu \varepsilon),$$

$$y^* = \int_0^y du(1 - \mu \varepsilon).$$

С учетом линейного изменения деформации по высоте – в соответствии с гипотезой плоских сечений –

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_{\max}}{h} y,$$

здесь ε_{\max} – деформация наиболее удаленного от нейтральной оси волокна, – эти выражения приводятся к виду:

$$b^* = b \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{h} y \right),$$

$$dy^* = dy \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{h} y \right),$$

$$y^* = y^* \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{2h} y \right).$$

Входящие в эти формулы дроби $\frac{y}{h}$ оставим в прежнем виде, а интегрирование выполняем в старых пределах: от 0 до $h/2$, поэтому формулу изгибающего момента можно переписать так:

$$M_x = 2 \int_0^{h/2} \sigma_T b \left(1 + 2\bar{E}^* \frac{\varepsilon_{\max}}{h} y \right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{h} y \right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{2h} y \right) y dy.$$

После некоторых преобразований получим:

$$m = 1,5 + (\bar{E}^* - 1,25)\varepsilon_{\max} -$$

$$- (0,9375\bar{E}^* - 0,375)\varepsilon_{\max}^2 +$$

$$+ (0,3\bar{E}^* - 0,0375)\varepsilon_{\max}^3 - 0,03125\bar{E}^*\varepsilon_{\max}^4. \quad (1)$$

Далее задача решается численно, по алгоритму, описанному в работе [2]. Решение сводится к определению значения ε_{\max} из уравнения (1) при заданном значении безразмерного момента m ; уравнение решается методом Ньютона, после чего находится кривизна изогнутой оси балки:

$$\kappa = \frac{2\varepsilon_{\max}}{h},$$

а затем определяются координаты точек изогнутой оси балки.

Результаты расчета по программе «Big» на языке «Fortran-90» представлены графиком на рис. 2.

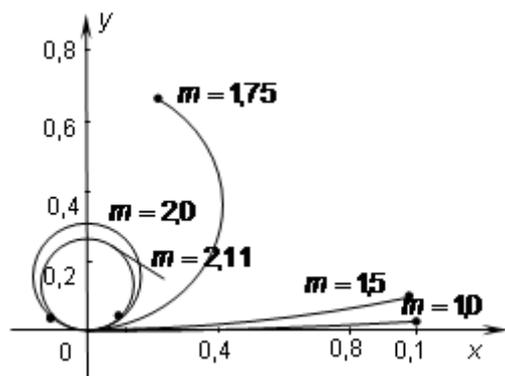


Рис. 2 – Изогнутая ось балки при различных $i = 20$ в зависимости от m : • – конец кривой

Каждая кривая – это изогнутая ось балки с относительной длиной $\bar{l} = l/h = 20$ при определенном значении безразмерного изгибающего момента.

Вычисления показывают, что учет изменяемости сечения сильно изменяет результат. Так, если без учета изменяемости сечения угол поворота свободного концевого сечения при $m = 1, 1,5, 1,75, 2,00, 2,1$ составляет 0,05954, 0,2400, 1,9200, 3,8400, 4,6080, то при учете изменяемости сечения – значительно больше: 0,05954, 0,2400, 2,7343, 6,0368, 7,6067. Несущая способность балки тоже оказывается существенно меньше. Если предельным считать состояние, когда деформация наиболее растянутого волокна достигает значения $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_B = 0,192$, а напряжение – предела прочности, то идеальный расчет (неизменяемое сечение) показывает, что это происходит при $m = 2,5$, а реальный расчет приводит к результату $m = 2,11$, то есть меньше на 18%.

По результатам расчетов построены также графики зависимости $m - \vartheta_{\max}$, где ϑ_{\max} – угол поворота свободного концевого сечения балки, они приведены на рис. 3. Каждый график относится к определенному значению относительной длины: $\bar{l} = 10, 20, 40$. Графики по форме напоминают диаграмму растяжения, заложенную в основу расчета. Каждый график приближенно можно изобразить ломаной, состоящей из двух линейных участков, описываемых уравнениями:

- $\bar{l} = 10$; I участок $m = 12,59_{\max}$, II участок $m = 1,48 + 0,16289_{\max}$;
- $\bar{l} = 20$; I участок $m = 6,259_{\max}$, II участок $m = 1,48 + 0,08149_{\max}$;
- $\bar{l} = 40$; I участок $m = 3,1259_{\max}$, II участок $m = 1,48 + 0,04079_{\max}$.

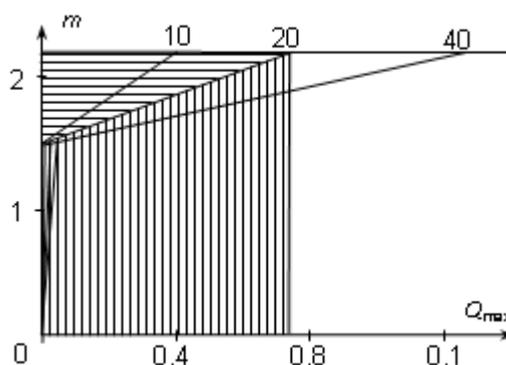


Рис. 3 – Зависимости угла поворота от изгибающего момента

Видно, что второй участок каждого графика является прямой, отсекающей на оси ординат один и тот же отрезок в точке $(0, 1,48)$.

Рассмотрим, как изменяется поперечное сечение балки. На рис. 4 показано измененное сечение, пусть верхняя часть балки при изгибе растягивается, а нижняя сжимается (в действительности наоборот). Предполагается, что в сжатой зоне изме-

нения формы и размеров сечения прямо противоположны тем, что в растянутой. Ширина сечения изменяется линейно от значения $b_{\min}^* = b \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{2}\right)$

вверху до значения $b_{\min}^* = b \left(1 + \frac{\varepsilon_{\max}}{2}\right)$ внизу, высота растянутой и сжатой части сечения становится равной, соответственно, $\frac{h}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{4}\right)$ и $\frac{h}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\max}}{4}\right)$. Расчет показывает, что в предельном

состоянии (при $\varepsilon_{\max} = 0,192$) верхняя часть сечения уменьшается на 9%, на столько же увеличивается сжимаемая нижняя часть.

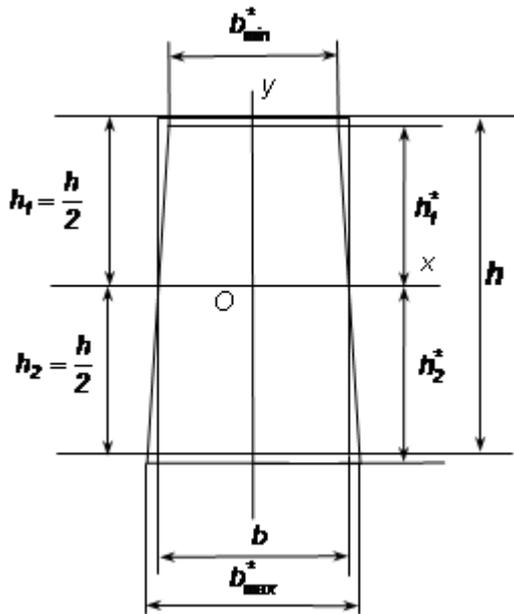


Рис. 4 – Сечение до и после деформирования

Определим потенциальную энергию деформации. Найдем ее как работу внутренних сил. Приложенная к элементарной площадке $b^* dy^*$ элементарная сила $\sigma b^* dy^*$ на пути εdz совершает работу: $dU = \sigma \varepsilon b^* dy^* dz$.

Подставив в это выражение формулы напряжения и деформации, найдем сначала потенциальную энергию, накопленную в элементе длины балки dz :

$$dU = 2 \int_0^{h/2} b \sigma_T \left(1 + \bar{E}^* \frac{2\varepsilon_{\max}}{h} y\right) \times \times \frac{2\varepsilon_{\max}}{h} y \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{h} y\right)^2 dy dz = \frac{\sigma_T \varepsilon_{\max}}{2} bh \Omega dz,$$

$$\text{где } \Omega = 1 + \frac{\bar{E}^* - 1}{6} \varepsilon_{\max} - \frac{2\bar{E}^* - 1}{32} \varepsilon_{\max}^2 + \frac{\bar{E}^*}{40} \varepsilon_{\max}^3.$$

Интегрируя по длине, найдем потенциальную энергию, накопленную во всей балке:

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \sigma_T \varepsilon_{\max} bh \Omega \int_0^l dz = = \frac{1}{2} \sigma_T \varepsilon_{\max} bh l \Omega = \frac{1}{2} \sigma_T \varepsilon_{\max} V \Omega.$$

Здесь $V = bh l$ – объем балки. Имея в виду, что $\frac{V}{W_x} = 6\bar{I}$, запишем формулу потенциальной энергии в окончательном виде:

$$U = 3\sigma_T W_x \bar{I} \Omega \varepsilon_{\max} = \frac{3M_x}{m} \Omega \bar{I} \varepsilon_{\max}.$$

Подсчитаем потенциальную энергию деформации нашей балки в предельном состоянии. Как уже было показано, в предельном состоянии максимальная деформация достигает предельного значения - $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_B = 0,192$, а изгибающий момент – значения $m = 2,11$. Найдем значение функции деформации Ω :

$$\Omega = 1 + \frac{1562,5/300 - 1}{6} \cdot 0,192 - \frac{2 \cdot 5,2083}{32} \cdot 0,192^2 + + \frac{5,2083}{40} \cdot 0,192^3 = 1,1236.$$

Тогда потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{3M_x}{m} \Omega \bar{I} \varepsilon_{\max} = \frac{3M_x \cdot 1,1236 \cdot 0,192 \cdot \bar{I}}{2,11} = = 0,3067 M_x \bar{I}.$$

При относительной длине балки $\bar{I} = 10, 20, 40$ потенциальная энергия составляет $U = 3,067 M_x, 6,134 M_x, 12,268 M_x$. Если принять во внимание, что угол поворота свободного сечения балки в предельном состоянии 3,8053, 7,6067 и 15,213 радиан, а произведение момента на угол поворота свободного конца балки в нашей задаче означает работу внешней силы (момента) на угловом перемещении, то работа постоянной внешней силы на перемещении равна $W = 3,8053 M_x, 7,6067 M_x, 15,213 M_x$. Сравнивая значения потенциальной энергии деформации с работой внешней силы, убеждаемся в том, что отношение

$$\frac{U}{W} = const.$$

Действительно,

$$\frac{U}{W} = \frac{3,067 M_x}{3,8057 M} = \frac{6,134}{7,6067} = \frac{12,268}{15,213} = 0,8064.$$

Здесь обозначено: W – работа внешних сил на перемещениях их точек приложения при условии постоянства сил в процессе деформирования. Полученная закономерность подтверждается и графиками зависимости момента m от угла поворота ϑ_{\max} (рис. 3). На рисунке один график – для случая $\bar{I} = 20$ – выделен штриховкой. Вся заштрихованная площадь – площадь прямоугольника – представляет собой работу W , площадь фигуры, заштрихованной вертикальными линиями, – потенциальную энергию

деформации U , а площадь фигуры, заштрихованной горизонтальными линиями, – дополнительную работу \mathcal{E} , известно, что

$$U + \mathcal{E} = W.$$

Сравнение соответствующих площадей графиков также приводит почти к тому же значению отношения $0,85$. Поэтому можно считать, что при чистом упругопластическом изгибе потенциальная энергия деформации составляет $0,8$, а дополнительная работа $0,2$ от работы внешних сил, или $\mathcal{E} = 0,25U$.

В заключении сделаем одно важное замечание. Изменение поперечного сечения приводит к тому, что оно становится несимметричным относительно горизонтальной оси и нейтральная ось приходит в новое положение. В данной работе это не

учтено, а просто сделано предположение, что общий изгибающий момент равен удвоенному моменту относительно старой нейтральной оси от напряжений в растянутой части сечения. Поэтому при больших деформациях возможна существенная ошибка, и этот вопрос требует дополнительного изучения.

Литература

1. Валиуллин А.Х. Упругопластический изгиб балки из материала с линейным упрочнением / А.Х. Валиуллин // Вестник Казанского технологического университета, 2010, № 9, С 453 – 458.
2. Валиуллин А.Х. Чистый упругопластический изгиб балки / А.Х. Валиуллин // Вестник Казанского технологического университета, 2011, № 6, С 182 – 186.

© А. Х. Валиуллин - канд. техн. наук, проф. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, tmsm@kstu.ru.