

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОТДАЧА ОТ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В РАДИАЛЬНО-РАСХОДЯЩЕМСЯ КАНАЛЕ

Ключевые слова: нестационарное температурное поле, тепловой поток, радиально-расходящийся канал, краевая задача, собственные значения, собственные функции, бесселевы функции.

Решается задача Дирихле для неустановившегося теплообмена от движущейся жидкости, перемещаемой в бесконечно-протяженном радиально-расходящемся канале. Записывается уравнение энергии и выражение для скорости потока в движущейся среде в цилиндрических координатах. Учитываются симметрия канала относительно оси z перенос тепла теплопроводностью и конвекцией в направлении оси r и теплопроводностью вдоль оси z . В результате получены соотношения для расчета температурного поля и локальных удельных тепловых потоков на стенке канала. Решения выражаются с помощью тригонометрических, экспоненциальных и бесселевых функций. Используются бесселевы функции второго рода действительного и мнимого аргументов дробного порядка.

Keywords: unstable temperature field, specific stream of heat, radial-divergency canal, boundary task, characteristic numbers, characteristic functions, bessel's functions.

Dirichlet's task for unstable heat change in stream of hot liquid which travel into infinitely length radial-divergency canal is solved. Are written equation of energy for moving of hot liquid stream and expression for velocity of stream in cilindric coordinates. Is taken in consideration the canal simmetration along axis z , heatexchange by heat conduction and convection along axis r and by heat conduction along axis z . In result were obtained correlations for calculation of temperature field and local heat streams on the walls of canal. The solutions is written by trigonometric, exponential and bessel's functions. It are used bessel's functions of second kind real and imaginary arguments fractional number of order.

Настоящая статья посвящена изучению неустановившейся теплоотдачи при движении нагретой жидкости через бесконечно-протяженный радиально-расходящийся канал при неоднородных граничных условиях первого рода.

Она продолжает серию работ [1-7] по изучению теплообмена при течении теплоносителя в каналах различной формы и отличающихся условиями на границах. Актуальность вопроса обоснована в вышеуказанных опубликованных работах. Следует подчеркнуть, что решения подобных задач актуальны не только в связи с прикладной направленностью проблемы, но еще и потому, что они имеют самостоятельное теоретическое значение как решения отдельных задач математической физики.

Данная задача аналогична [7], однако, здесь в качестве исходного принимается дифференциальное уравнение, учитывающее частную производную от температуры по времени. Это позволит оценить время, необходимое для достижения стационарного режима теплообмена, а также дать теоретические формулы, пригодные для расчета неустановившегося теплообмена в радиально-расходящемся канале, если неустановившейся режим является рабочим.

Физическая постановка задачи идентична приведенной в работе [6].

Начально-краевая задача (рис. 1)

$$\frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} = a^2 \left[\frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} \right], \quad (1)$$

$$R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z < l, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

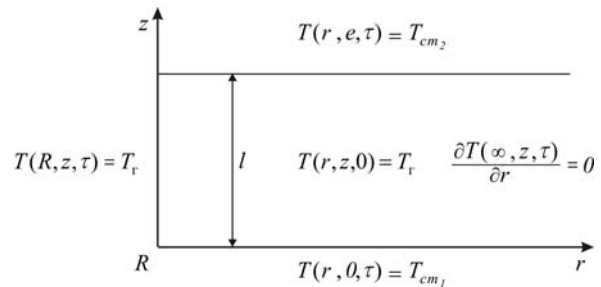


Рис. 1 - Начальные и граничные условия

$$T(r, z, 0) = T_r, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (2)$$

$$T(R, z, \tau) = T_r, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (3)$$

$$T(r, 0, \tau) = T_{cm1}, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (4)$$

$$T(r, l, \tau) = T_{cm2}, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(\infty, z, \tau)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (6)$$

Здесь $V_r = Q/2\pi l r$.

Вводится безразмерная температура

$$\theta(r, z, \tau) = \frac{T(r, z, \tau) - T_{cm2}}{T_r - T_{cm2}}. \quad (7)$$

Следует заметить, что введение безразмерной температуры позволит в дальнейшем получить более компактное решение задачи, нежели ее редукция в размерной форме.

Учет (7) и выражения для V_r дает

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{c^2}{r} \frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial r} = \frac{\partial^2 \theta(r, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta(r, z, \tau)}{\partial r^2}, \quad (8)$$

$$R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

$$\text{где } c^2 = (b^2 - a^2)/a^2,$$

$$\theta(r, z, 0) = 1, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (9)$$

$$\theta(R, z, \tau) = 1, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (10)$$

$$\theta(r, l, \tau) = 0, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (11)$$

$$\theta(r, 0, \tau) = \frac{T_{cm1} - T_{cm2}}{T_\Gamma - T_{cm2}} = \bar{T}, \quad (12)$$

$$R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

$$\frac{\partial \theta(\infty, z, \tau)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (13)$$

Задача (8)-(13) решается методом разделения переменных. Сначала она редуцируется (расщепляется) при помощи замены

$$\theta(r, z, \tau) = \theta_1(r, z, \tau) + \theta_2(r, z). \quad (14)$$

Следует также отметить, что редуцирование, именно, в виде (14) является оптимальным для получения наиболее простого (менее громоздкого) решения (1)-(6) в целом.

Это связано с нахождением коэффициентов в дальнейших разложениях.

Применение (14) к (8)-(13) позволяет получить

$$\frac{c^2}{r} \frac{\partial \theta_2(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial^2 \theta_2(r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta_2(r, z)}{\partial r^2}, \quad (15)$$

$$R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq l,$$

$$\theta_2(R, z) = 1, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (16)$$

$$\theta_2(r, l) = 0, \quad R \leq r < \infty, \quad (17)$$

$$\theta_2(r, 0) = \bar{T}, \quad R \leq r < \infty, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_2(\infty, z)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (19)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta_1(r, z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{c^2}{r} \frac{\partial \theta_1(r, z, \tau)}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial^2 \theta_1(r, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta_1(r, z, \tau)}{\partial r^2}, \quad (20)$$

$$R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

$$\theta_1(r, z, 0) = 1 - \theta_2(r, z), \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq l, \quad (21)$$

$$\theta_1(R, z, \tau) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (22)$$

$$\theta_1(r, 0, \tau) = 0, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (23)$$

$$\theta_1(r, l, \tau) = 0, \quad R \leq r < \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta_1(\infty, z, \tau)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (25)$$

Решается задача (15)-(19) путем ее расщепления с помощью замены

$$\theta_2(r, z) = \theta_3(r, z) + \theta_4(z). \quad (26)$$

В результате было получено

$$\frac{c^2}{r} \frac{\partial \theta_3(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial^2 \theta_3(r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta_3(r, z)}{\partial r^2}, \quad (27)$$

$$R \leq r < \infty, \quad 0 \leq z \leq l,$$

$$\theta_3(r, z) = 1 - \theta_4(z), \quad 0 \leq z \leq l, \quad (28)$$

$$\theta_3(r, l) = 0, \quad R \leq r < \infty, \quad (29)$$

$$\theta_3(r, 0) = 0, \quad R \leq r < \infty, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta_3(\infty, z)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (31)$$

$$\frac{d^2 \theta_4(z)}{dz^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (32)$$

$$\theta_4(l) = 0, \quad (33)$$

$$\theta_4(0) = \bar{T}. \quad (34)$$

Решением (32)-(34) будет функция

$$\theta_4(z) = \bar{T} \left(1 - \frac{z}{l} \right). \quad (35)$$

После разделения переменных в (27)-(31) с помощью замены

$$\theta_3(r, z) = U(r) Z(z) \quad (36)$$

получаются две краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r^2 U''(r) - c^2 r U'(r) - \varepsilon^2 r^2 U(r) = 0, \quad (37)$$

$$U(R) = 1, \quad (38)$$

$$\frac{dU(\infty)}{dr} = 0. \quad (39)$$

$$Z''(z) + \varepsilon^2 Z(z) = 0, \quad (40)$$

$$Z(l) = 0, \quad (41)$$

$$Z(0) = 0. \quad (42)$$

Здесь ε^2 - константа разделения ($\varepsilon > 0$).

Решение дифференциального уравнения (37) выражается через бесселевы функции [8]

$$U(r) = r^\nu [C_1 I_\nu(\varepsilon r) + C_2 K_\nu(\varepsilon r)],$$

$$\text{где } \nu = (1 + c^2)/2 = b^2/2a^2.$$

Для удовлетворения граничному условию на бесконечности (39) следует в этом решении положить $C_1 = 0$, так как

$$I_\nu(\varepsilon r) \rightarrow \infty, \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Тогда для функции

$$U(r) = C_2 r^\nu K_\nu(\varepsilon r)$$

необходимо удовлетворить условию (38). В итоге получено

$$U(r) = \frac{r^\nu K_\nu(\varepsilon r)}{R^\nu K_\nu(\varepsilon R)}. \quad (43)$$

Решение краевой задачи (40)-(42)

$$Z_m(z) = C_m \sin \varepsilon_m z = C_m \sin \frac{\pi m z}{l}, \quad (44)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом общим решением (27), (29)-(31) согласно (36), (43), (44) с учетом того, что $\varepsilon \equiv \varepsilon_m$, будет

$$\theta_3(r, z) = \left(\frac{r}{R} \right)^\nu \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{K_\nu \left(\frac{\pi m r}{l} \right)}{K_\nu \left(\frac{\pi m R}{l} \right)} \sin \frac{\pi m z}{l}. \quad (45)$$

Применение к (45) граничного условия (28) приводит к выражению

$$1 - \theta_4(z) = 1 - \bar{T}\left(1 - \frac{z}{l}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin \frac{\pi m z}{l}. \quad (46)$$

Умножением обеих частей выражения (46) на $\sin \frac{\pi n z}{l}$, с последующим интегрированием по z от 0 до l и с учетом свойства ортогональности произведения синусов на данном интервале, получено выражение для C_m (при $m = n$)

$$C_m = \frac{\int_0^l \left[1 - \bar{T}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\right] \sin \frac{\pi m z}{l} dz}{\int_0^l \sin^2 \frac{\pi m z}{l} dz}.$$

Вычисление интегралов дает

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi m z}{l} dz &= \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \sin \frac{\pi m z}{l} z dz = \\ &= \frac{l}{\pi m} [1 - (-1)^m]; \\ \int_0^l z \sin \frac{\pi m z}{l} dz &= -\frac{l^2}{\pi m} (-1)^m, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Откуда

$$C_m = -\frac{2}{\pi} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m}. \quad (47)$$

Подстановка (47) в (45) позволяет получить

$$\begin{aligned} \theta_3(r, z) &= -\frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{R}\right)^v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \times \\ &\times \frac{K_v\left(\frac{\pi m}{l} r\right)}{K_v\left(\frac{\pi m}{l} R\right)} \sin \frac{\pi m z}{l}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь взято суммирование от $m = 1$, а не от $m = 0$, по очевидным причинам.

На основании (26), (35), и (48) получено

$$\begin{aligned} \theta_2(r, z) &= \theta_3(r, z) + \theta_4(z) = \bar{T}\left(1 - \frac{z}{l}\right) - \\ &- \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{R}\right)^v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \times \\ &\times \frac{K_v\left(\frac{\pi m}{l} r\right)}{K_v\left(\frac{\pi m}{l} R\right)} \sin \frac{\pi m z}{l}. \end{aligned} \quad (49)$$

В (20)-(25) переменные разделяются, если положить

$$\theta_1(r, z, \tau) = \phi(r) Z(z) T(\tau). \quad (50)$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} &= \frac{\phi''(r)}{\phi(r)} - \frac{c^2}{r} \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\delta^2, \\ \frac{\phi''(r)}{\phi(r)} - \frac{c^2}{r} \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} &= -\beta^2. \end{aligned}$$

Откуда получаются три задачи

$$r^2 \phi''(r) - c^2 r \phi'(r) + \beta^2 r^2 \phi(r) = 0, \quad (51)$$

$$\phi(R) = 0, \quad (52)$$

$$\frac{d\phi(\infty)}{dr} = 0. \quad (53)$$

$$Z''(z) + (\delta^2 - \beta^2) Z(z) = 0, \quad (54)$$

$$Z(0) = 0, \quad (55)$$

$$Z(l) = 0. \quad (56)$$

$$T'(\tau) + a^2 \delta^2 T(\tau) = 0. \quad (57)$$

Решается задача (51)-(53). Решением уравнения Бесселя (51) будет функция [8]

$$\phi(r) = r^v [C_1 J_v(\beta r) + C_2 Y_v(\beta r)],$$

$$\text{где } v = \left(1 + c^2\right)/2 = b^2/2a^2.$$

Удовлетворение условию (53) дает

$$C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \phi(r) = C_2 r^v Y_v(\beta r),$$

так как $J_v(\beta r) \rightarrow \infty$, при $r \rightarrow \infty$.

Условие (51) требует, чтобы

$$\phi(R) = C_2 R^v Y_v(\beta R) = 0.$$

Поскольку $C_2 \neq 0, R \neq 0$, то будет иметь место следующее характеристическое уравнение

$$Y(\mu_n) = 0, \quad (58)$$

где $\mu_n = \beta_n R$.

Итак, частное решение задачи (51)-(53) будет иметь вид

$$\phi(r) = C_n r^v Y_v\left(\mu_n \frac{r}{R}\right). \quad (59)$$

Частным решением краевой задачи (54)-(56) будет

$$Z_n(z) = C_m \sin \frac{\pi m z}{l}. \quad (60)$$

Кроме того

$$\delta_{m,n}^2 - \beta_n^2 = \delta_{m,n}^2 - \frac{\mu_n^2}{R^2} = \frac{\pi^2 m^2}{l^2}. \quad (61)$$

Решение (57) приведет к функции

$$T(\tau) = \exp\left(-a^2 \delta_{m,n}^2 \tau\right). \quad (62)$$

На основании (50), (59)-(62) получено общее решение задачи (20), (22)-(25)

$$\begin{aligned} \theta_1(r, z, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} r^v Y_v\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \times \\ &\times \sin \frac{\pi m z}{l} \exp\left(-a^2 \left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\right) \tau\right), \end{aligned} \quad (63)$$

где $C_{m,n} = C_m C_n$.

Теперь необходимо удовлетворить начальному условию (21) и найти коэффициенты $C_{m,n}$.

Это приводит к выражению

$$\theta_1(r, z, 0) = 1 - \theta_2(r, z) = 1 - \bar{T}\left(1 - \frac{z}{l}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \times \\
& \times \frac{K_v \left(\frac{\pi m}{l} r \right)}{K_v \left(\frac{\pi m}{l} R \right)} \sin \frac{\pi m z}{l} = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} r^v Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \sin \frac{\pi m z}{l}. \quad (64)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что поскольку при определении постоянных $C_{m,n}$ используется левая часть выражения (64), то суммирование в правой части этого соотношения по m выполняется от $m=1$, а не $m=0$, как в (63). Это относится и к окончательной записи выражения (63) после определения постоянных $C_{m,n}$.

Использование ортогональности тригонометрических и бesselевых функций, соответственно в интервалах по z от 0 до l и по r от R до ∞ , после интегрирования и некоторых преобразований в (64) дает

$$\begin{aligned}
& \int_R^{\infty} \frac{Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right)}{r^{v-1}} dr \int_0^l \sin \frac{\pi m z}{l} dz - \\
& - \bar{T} \int_R^{\infty} \frac{Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right)}{r^{v-1}} dr \int_0^l \left(1 - \frac{z}{l} \right) \sin \frac{\pi m z}{l} dz + \\
& + \frac{2}{\pi R^v} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \frac{1}{K_v \left(\frac{\pi m R}{l} \right)} \times \\
& \times \int_R^{\infty} r K_v \left(\frac{\pi m}{l} r \right) Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) dr \times \\
& \times \int_0^l \sin^2 \frac{\pi m z}{l} dz = C_{m,n} \int_R^{\infty} r Y_v^2 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) dr \times \\
& \times \int_0^l \sin^2 \frac{\pi m z}{l} dz. \quad (65)
\end{aligned}$$

Следует также заметить, что ортогональность бesselевых функций действительного аргумента $Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right)$ и $Y_v \left(\mu_p \frac{r}{R} \right)$ с весом r в интервале от R до ∞ была доказана автором данной статьи, то есть

$$\int_R^{\infty} r Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) Y_v \left(\mu_p \frac{r}{R} \right) dr = \begin{cases} 0, & \text{при } \mu_n \neq \mu_p, \\ > 0, & \text{при } \mu_n \equiv \mu_p. \end{cases}$$

Теперь необходимо вычислить интегралы от бesselевых функций.

Использование [9] позволяет найти

$$\int_R^{\infty} \frac{Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right)}{r^{v-1}} dr = \frac{R^{-v+2}}{\mu_n} Y_{v-1}(\mu_n). \quad (66)$$

Выполненное автором статьи преобразование и интегрирование в результате дало

$$\int_R^{\infty} r Y_v^2 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) dr = -\frac{R^2}{2} Y_{v+1}^2(\mu_n). \quad (67)$$

Специальным приемом с использованием дифференциальных уравнений Бесселя действительного и мнимого аргументов второго рода порядка v было получено автором настоящей статьи выражение

$$\begin{aligned}
& \int_R^{\infty} r K_v \left(\frac{\pi m}{l} r \right) Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) dr = \\
& = -\frac{R^2 l^2 \mu_n Y_{v+1}(\mu_n) K_v \left(\frac{\pi m}{l} R \right)}{l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2}. \quad (68)
\end{aligned}$$

Преобразованием (65), с учетом интегралов (66)-(68) и ранее вычисленных интегралов по z , получено

$$\begin{aligned}
C_{m,n} & = \frac{4}{\pi R^v} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m Y_{v+1}^2(\mu_n)} \times \\
& \times \frac{(l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v-1}(\mu_n) + \mu_n^2 l^2 Y_{v+1}(\mu_n)}{\mu_n (l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2)}. \quad (69)
\end{aligned}$$

Использование (7), (14), (49), (63), (69) позволяет получить окончательное решение исходной задачи (1)-(6)

$$\begin{aligned}
& \frac{T(r, z, \tau) - T_{cm2}}{T_r - T_{cm2}} = \bar{T} \left(1 - \frac{z}{l} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^v \times \\
& \times \left[2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \times \right. \\
& \times \frac{(l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v-1}(\mu_n) + \mu_n^2 l^2 Y_{v+1}(\mu_n)}{\mu_n (l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v+1}^2(\mu_n)} \times \\
& \times Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \exp \left(-a^2 \left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \right) \tau \right) - \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \frac{K_v \left(\frac{\pi m}{l} R \right)}{K_v \left(\frac{\pi m}{l} R \right)} \right] \times \\
& \times \sin \frac{\pi m z}{l}. \quad (70)
\end{aligned}$$

Или в размерной форме

$$\begin{aligned}
& T(r, z, \tau) = T_{cm2} + (T_r - T_{cm2}) \left\{ \bar{T} \left(1 - \frac{z}{l} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^v \times \right. \\
& \times \left[2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \times \right. \\
& \times \frac{(l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v-1}(\mu_n) + \mu_n^2 l^2 Y_{v+1}(\mu_n)}{\mu_n (l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v+1}^2(\mu_n)} \times \\
& \left. \left. \times Y_v \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \exp \left(-a^2 \left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \right) \tau \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\times Y_v\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-a^2\left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\right)\tau\right) -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{T} + (-1)^m - 1}{m} \frac{K_v\left(\frac{\pi m r}{l}\right)}{K_v\left(\frac{\pi m R}{l}\right)} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi m z}{l}. \quad (71)$$

Удельный тепловой поток на нижнюю стенку с температурой T_{cm1}

$$q|_{z=0} = \lambda_{жс} \frac{dT(r,0,\tau)}{dz} = \frac{2\lambda_{жс}(T_{\Gamma} - T_{cm2})}{l} \times$$

$$\times \left(\frac{r}{R}\right)^v \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{T} + (-1)^m - 1] \times \right.$$

$$\times \frac{(l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v-1}(\mu_n) + \mu_n^2 l^2 Y_{v+1}(\mu_n)}{\mu_n (l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v+1}^2(\mu_n)} \times$$

$$\times Y_v\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-a^2\left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\right)\tau\right) -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{T} + (-1)^m - 1] \frac{K_v\left(\frac{\pi m r}{l}\right)}{K_v\left(\frac{\pi m R}{l}\right)} \left\{ - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_{жс}(T_{\Gamma} - T_{cm2})\bar{T}}{l} \right\}. \quad (72)$$

Удельный тепловой поток на верхнюю стенку с температурой T_{cm2}

$$q|_{z=l} = -\lambda_{жс} \frac{dT(r,l,\tau)}{dz} = \frac{2\lambda_{жс}(T_{\Gamma} - T_{cm2})}{l} \times$$

$$\times \left(\frac{r}{R}\right)^v \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^m (1 - \bar{T}) - 1] \times \right.$$

$$\times \frac{(l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v-1}(\mu_n) + \mu_n^2 l^2 Y_{v+1}(\mu_n)}{\mu_n (l^2 \mu_n^2 + R^2 \pi^2 m^2) Y_{v+1}^2(\mu_n)} \times$$

$$\times Y_v\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-a^2\left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\right)\tau\right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [1 + (-1)^m (\bar{T} - 1)] \frac{K_v\left(\frac{\pi m r}{l}\right)}{K_v\left(\frac{\pi m R}{l}\right)} \left\{ + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{жс}(T_{\Gamma} - T_{cm2})\bar{T}}{l} \right\}. \quad (73)$$

Обозначения

r, z - радиальная и осевая координаты цилиндрической системы координат, м;

$T(r, z, \tau)$ - текущая температура жидкости, К;

T_{Γ} - постоянная температура горячей жидкости при входе в канал, ($r = R$), К;

T_{cm1}, T_{cm2} - постоянные температуры нижней и верхней стенок канала, обращенных к жидкости, соответственно, К;

R - внутренний радиус штуцера на входе в канал, м;

Q - объемный расход жидкости, м³/с;

a^2 - коэффициент температуропроводности, м²/с;

l - ширина канала, м;

b^2 - константа, м²/с;

q - удельный тепловой поток, Вт/м²;

$\lambda_{жс}$ - теплопроводность жидкости, Вт/(м К);

τ - время, с;

$\delta^2, \beta^2, \varepsilon^2$ - константы разделения;

$\pi = 3,14159...$ - число пи;

$\theta(r, z, \tau), \theta_1(r, z, \tau), \theta_2(r, z, \tau), \theta_3(r, z, \tau), \bar{T}$ - температуры, безразмерные;

$I_v(\varepsilon r)$ - бесселева функция первого рода мнимого аргумента, порядка v , безразмерная;

$K_v(\varepsilon r), K_v(\beta r), K_v(\varepsilon R), K_v\left(\frac{\pi m r}{l}\right), K_v\left(\frac{\pi m R}{l}\right)$ -

бесселевы функции второго рода мнимого аргумента порядка v , безразмерные;

$J_v(\varepsilon r), J_v(\beta r)$ - бесселевы функции первого рода действительного аргумента, порядка v , безразмерные;

$Y_v(\varepsilon r), Y_v(\beta r), Y_v\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)$ - бесселевы функции второго рода действительного аргумента порядка v , безразмерные.

Литература

1. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, В.П. Бурдинов, Э.В. Чиркунов, Теоретические основы химической технологии (ТОХТ), **38**, 6, 655-660 (2004).
2. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 42-46 (2012).
3. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 147-150 (2012).
4. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 11, 143-145 (2012).
5. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 14, 90-92 (2012).
6. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 18, 58-63 (2012).
7. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 20, 56-61 (2012).
8. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, Москва, 1976. 576 с.
9. И.Н. Рыжик, И.С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1951. 464 с.