УДК 519.872

Р. Ф. Гильмутдинов, А. П. Кирпичников

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРЕДНИМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЕ В ОЧЕРЕДИ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, поток требований, очередь, обслуживающее устройство.

Представлена математическая модель замкнутой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания в очереди. Проведена подробная математическая формализация модели и впервые вычислены вторые моменты всех важнейших числовых характеристик систем массового обслуживания этого типа.

Keywords: queuing system, flow of requirements, queue, serving device.

The mathematical model of multi-channel queuing system of the closed type with with bounded mean residence time in the queue is presented. A detailed mathematical formalization of the model is held; for the first time the second moments of all the important numerical characteristics of queuing system of this type are calculated.

Рассмотрим замкнутую систему массового обслуживания с ограниченным средним временем нахождения в очереди. За основу возьмем проанализированную нами в работе [1] замкнутую модель M/M/m. Граф такой системы имеет вид, изображенный на рис. 1. Применяя общие выражения для предельных вероятностей состояний системы, и используя те же обозначения, что и в работе [1], имеем

$$p_1 = \frac{N!}{(N-1)!}\rho\, p_0\,;$$

$$p_2 = \frac{N!}{(N-2)!2!}\rho^2 p_0\;\; p_3 = \frac{N!}{(N-3)!3!}\rho^3 p_0\,;\ \ldots\,;$$

$$p_m = \frac{N!}{(N-m)!m!}\rho^m p_0\,;$$

$$p_{m+1} = \frac{N!}{(N-m-1)!m!(m+\beta)}\rho^{m+1} p_0\,;$$

$$p_{m+2} = \frac{N!}{(N-m-2)!m!(m+\beta)(m+2\beta)}\rho^{m+2} p_0\,;\ \ldots\,;$$

$$p_N = \frac{N!}{0!m!(m+\beta)(m+2\beta)\cdots[m+(N-m)\beta]}\rho^N p_0\,,$$

то есть

$$p_k = \frac{N!\rho^k}{(N-k)!k!}p_0 \text{ при } k \le m\,;$$

$$p_k = \frac{\rho^m}{m!}\frac{N!\alpha^{k-m}}{(N-k)!(m/\beta+1)_{k-m}}p_0 \text{ при } m \le k \le N\,,$$

или

$$p_k = \frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}p_0 = C_N^k\rho^k p_0 \text{ при } k \le m\,;$$

$$p_k = \frac{\rho^m}{m!}\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}p_0 \text{ при } m \le k \le N\,,$$

$\alpha = \rho/\beta = \lambda/\nu$. Отсюда

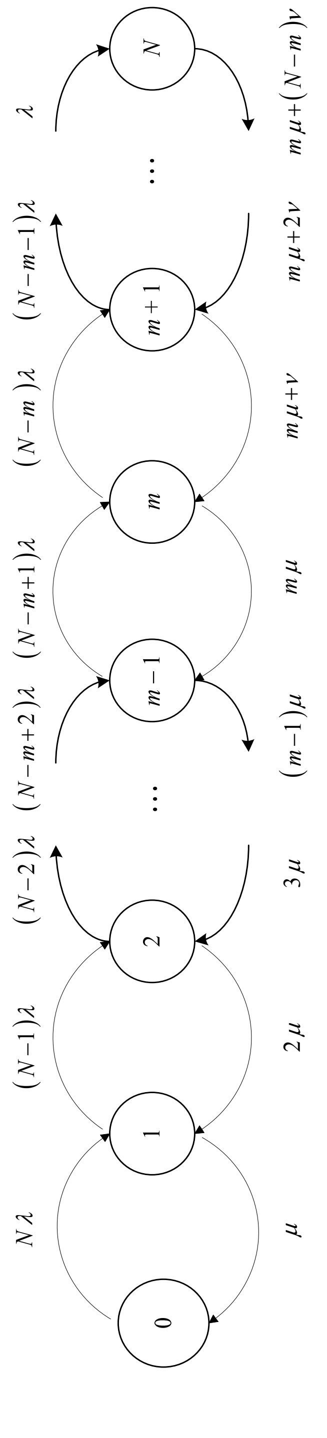

Рис. 1

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}+\frac{\rho^m}{m!}\sum_{k=m+1}^{N}\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}\right]^{-1}.$$

Как и раньше, везде полагаем $N>m$, поскольку при $m\ge N$ $\bar{l}=0$ и данный случай, очевидно, ничем не отличается от соответствующего случая замкнутой модели M/M/m, рассмотренной в работе [1].

Числовые характеристики установившегося режима

Вероятность ожидания

$$p_{ожид}=\frac{1}{N-\bar{k}}\sum_{k=m}^{N-1}(N-k)p_k=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{m!\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}(N-k)\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{\rho m!\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\frac{N^{[k+1]}\left[m+(k+1-m)\beta\right]\alpha^{k-m+1}}{(m/\beta+1)_{k+1-m}}=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{\rho m!\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m+1}^{N}\frac{N^{[k]}\left[m+(k-m)\beta\right]\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}=$$

$$=\frac{1}{\rho\left(N-\bar{k}\right)}\left[m\sum_{k=m+1}^{N}p_k+\beta\sum_{k=m+1}^{N}(k-m)p_k\right]= \quad (1)$$

$$=\frac{1}{\rho\left(N-\bar{k}\right)}\left(m\sum_{k=m+1}^{N}p_k+\beta\bar{l}\right)=$$

$$\frac{m}{\rho\left(N-\bar{k}\right)}\left(1-\sum_{k=0}^{m}p_k+\frac{\beta\bar{l}}{m}\right).$$

Вероятность немедленного обслуживания

$$p_{обсл}=\frac{1}{N-\bar{k}}\sum_{k=0}^{m-1}(N-k)p_k=$$

$$=\frac{p_0}{N-\bar{k}}\sum_{k=0}^{m-1}(N-k)\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}=$$

$$=\frac{p_0}{\rho\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\frac{N^{[k+1]}\rho^{k+1}}{(k+1)!}=$$

$$\frac{1}{\rho\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=1}^{m}k\,p_k. \quad (2)$$

Среднее число требований, находящихся под обслуживанием, как обычно,

$$\bar{m}=\sum_{k=0}^{m}k\,p_k+m\sum_{k=m+1}^{N}p_k=\ m-\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)p_k.$$

Полное число заявок в системе в целом

$$\bar{k}=\sum_{k=0}^{N}k\,p_k=\sum_{k=0}^{N}(k-N+N)p_k=$$

$$=N\sum_{k=0}^{N}p_k-\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)p_k=$$

$$=N-\sum_{k=0}^{m-1}(N-k)p_k-\sum_{k=m}^{N-1}(N-k)p_k=$$

$$=N-p_0\sum_{k=0}^{m-1}(N-k)\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{m!}\sum_{k=m}^{N-1}(N-k)\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}=$$

$$=N-\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\frac{N^{[k+1]}\rho^{k+1}}{(k+1)!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{\rho m!}\sum_{k=m}^{N-1}\frac{N^{[k+1]}\left[m+(k+1-m)\beta\right]\alpha^{k+1-m}}{(m/\beta+1)_{k+1-m}}=$$

$$=N-\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{\rho m!}\sum_{k=m+1}^{N}\frac{N^{[k]}\left[m+(k-m)\beta\right]\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}=$$

$$=N-\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}-$$

$$-\frac{m\rho^m p_0}{\rho m!}\sum_{k=m+1}^{N}\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}+$$

$$+\frac{\beta\rho^m p_0}{\rho m!}\sum_{k=m+1}^{N}(k-m)\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}=$$

$$=N-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k\,p_k-\frac{m}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}p_k-\frac{\beta}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}(k-m)p_k=$$

$$=N-\frac{1}{\rho}\left[\sum_{k=0}^{m}k\,p_k+m\sum_{k=m+1}^{N}p_k\right]-$$

$$-\frac{\beta}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}(k-m)p_k=N-\frac{\bar{m}+\beta\bar{l}}{\rho}. \quad (3)$$

По-другому:

$$A=\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\,p_k-\nu\bar{l}=$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{m-1}(N-k)p_k-\nu\bar{l}=\lambda\left(N-\bar{k}\right)-\nu\bar{l},$$

и тогда

$$A+\nu \bar{l}=\lambda\left(N-\bar{k}\right),$$

то есть

$$\frac{A}{\mu}+\frac{\nu}{\mu}\bar{l}=\frac{\lambda}{\mu}\left(N-\bar{k}\right)$$

или

$$\bar{m}+\beta\bar{l}=\rho\left(N-\bar{k}\right),$$

откуда окончательно имеем

$$\bar{k}=N-\frac{\bar{m}+\beta\bar{l}}{\rho}$$

в соответствии с формулой (3). Полученное соотношение позволяет легко проверить справедливость формул (1) и (2):

$$p_{ожид}+p_{обсл}=$$

$$=\frac{1}{\rho\left(N-\bar{k}\right)}\left(\sum_{k=0}^{m}k\,p_k+m\sum_{k=m+1}^{N}p_k+\beta\bar{l}\right)=1.$$

При этом, очевидно, относительная пропускная способность

$$q=\frac{A}{\lambda\left(N-\bar{k}\right)}=1-\frac{\nu}{\lambda\left(N-\bar{k}\right)}\bar{l}=1-\frac{\bar{l}}{\alpha\left(N-\bar{k}\right)}.$$

Средняя длина очереди

$$\bar{l}=\bar{k}-\bar{m}=N-\frac{\bar{m}}{\rho}-\beta\frac{\bar{l}}{\rho}-\bar{m},$$

так что

$$\bar{l}\left(1+\frac{\beta}{\rho}\right)=N-\bar{m}\,\frac{1+\rho}{\rho},$$

откуда следует

$$\bar{l}=\frac{\rho N}{\rho+\beta}\left[1-\frac{\bar{m}}{\bar{m}\left(\bar{l}=0\right)}\right]=\frac{N}{1+\delta}\left[1-\frac{\bar{m}}{\bar{m}\left(\bar{l}=0\right)}\right].$$

Здесь $\delta=\beta/\rho=\nu/\lambda=1/\alpha$, и этот параметр показывает, какое количество «нетерпеливых» заявок в среднем покидает очередь за среднее время, в течение которого в систему поступает одна заявка. При этом

$$p_{ожид}=\frac{m}{\bar{m}+\beta\bar{l}}\left(1-\sum_{k=0}^{m}p_k+\frac{\beta\bar{l}}{m}\right);$$

$$p_{обсл}=\frac{1}{\bar{m}+\beta\bar{l}}\sum_{k=1}^{m}k\,p_k.$$

При $m=N$ очередь в системе отсутствует, в этом случае $p_{ожид}=0$, $p_{обсл}=1$.

Обратимся далее ко вторым моментам соответствующих величин. Найдем дисперсию числа требований, одновременно находящихся под обслуживанием (числа занятых каналов). В данном случае, очевидно, имеем

$$\sum_{k=1}^{m}k\,p_k=\rho\left(N-\bar{k}\right)p_{обсл}=$$

$$=\left(\bar{m}+\beta\bar{l}\right)p_{обсл}=\left(\bar{m}+\beta\bar{l}\right)\left(1-p_{ожид}\right),$$

откуда

$$\zeta=\frac{\rho N\left(m-\bar{m}\right)-\left(\bar{m}+\beta\bar{l}\right)\left(1-p_{ожид}\right)}{1+\rho},$$

и тогда

$$\sigma_m^2=\bar{m}\left(m-\bar{m}\right)-\zeta=$$

$$=\frac{\left(\bar{m}+\beta\bar{l}\right)\left(1-p_{ожид}\right)-\left(\rho+\beta\right)\left(m-\bar{m}\right)\bar{l}}{1+\rho}.$$

Дисперсия общего числа требований в системе

$$\sigma_k^2=\sum_{k=0}^{N}k^2\,p_k-\bar{k}^2=\sum_{k=0}^{N}\left(k-N+N\right)k\,p_k-\bar{k}^2=$$

$$=N\sum_{k=0}^{N}k\,p_k-\sum_{k=0}^{N-1}\left(N-k\right)k\,p_k-\bar{k}^2=$$

$$=N\bar{k}-\sum_{k=0}^{m-1}\left(N-k\right)k\,p_k-\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)k\,p_k-\bar{k}^2=$$

$$=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)-p_0\sum_{k=0}^{m-1}\left(N-k\right)k\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{m!}\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)k\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k-m}}=$$

$$=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)-\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m-1}\left(k+1-1\right)\left(k+1\right)\frac{N^{[k+1]}\rho^{k+1}}{\left(k+1\right)!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{\rho\,m!}\sum_{k=m}^{N-1}\Big\{\left(k+1-1\right)\left[m+\left(k+1-m\right)\beta\right]\times$$

$$\times\frac{N^{[k+1]}\alpha^{k+1-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k+1-m}}\Big\}=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)-$$

$$-\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m-1}\left(k+1\right)^2\frac{N^{[k+1]}\rho^{k+1}}{\left(k+1\right)!}+$$

$$+\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m-1}\left(k+1\right)\frac{N^{[k+1]}\rho^{k+1}}{\left(k+1\right)!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{\rho\,m!}\sum_{k=m}^{N-1}\left(k+1\right)\left[m+\left(k+1-m\right)\beta\right]+$$

$$+\frac{\rho^m p_0}{\rho\,m!}\sum_{k=m}^{N-1}\left[m+\left(k+1-m\right)\beta\right]\frac{N^{[k+1]}\alpha^{k+1-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k+1-m}}=$$

$$=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)-\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k^2\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}+\frac{p_0}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k\frac{N^{[k]}\rho^k}{k!}-$$

$$-\frac{\rho^m p_0}{\rho m!}\sum_{k=m+1}^{N}k\frac{N^{[k]}[m+(k-m)\beta]\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}+$$

$$+\frac{\rho^m p_0}{\rho m!}\sum_{k=m+1}^{N}\frac{N^{[k]}[m+(k-m)\beta]\alpha^{k-m}}{(m/\beta+1)_{k-m}}=$$

$$=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k^2 p_k+\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k\,p_k-\frac{m}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}k\,p_k-$$

$$-\frac{\beta}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}k(k-m)p_k+\frac{m}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}p_k+$$

$$-\frac{\beta}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}k(k-m)p_k+\frac{m}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}p_k+$$

$$+\frac{\beta}{\rho}\sum_{k=m+1}^{N}(k-m)p_k=$$

$$=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)+\frac{\bar{m}}{\rho}-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{m}k^2 p_k-\frac{m}{\rho}\left(\bar{k}-\sum_{k=0}^{m}k\,p_k\right)-$$

$$-\frac{\beta}{\rho}\left[\sum_{k=0}^{N}k(k-m)p_k-\sum_{k=0}^{m}k(k-m)p_k\right]+\frac{\beta\bar{l}}{\rho}=$$

$$-\frac{\beta}{\rho}\left[\sum_{k=0}^{N}k^2 p_k-m\sum_{k=0}^{N}k\,p_k+\sum_{k=0}^{m}(m-k)k\,p_k\right]+$$

$$+\frac{\beta\bar{l}}{\rho}=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)+\frac{\bar{m}}{\rho}-\frac{m(1-\beta)\bar{k}}{\rho}+$$

$$+\frac{\beta\bar{l}}{\rho}+\frac{1-\beta}{\rho}\zeta-\frac{\beta}{\rho}\left(\sigma_k^2+\bar{k}^2\right).$$

Отсюда после несложных преобразований имеем

$$(1+\delta)\sigma_k^2=\bar{k}\left(N-\bar{k}\right)-$$

$$-\frac{m\bar{l}+(m-1)\bar{m}-\zeta-\beta\left(m\bar{k}+\bar{l}-\zeta-\bar{k}^2\right)}{\rho}=$$

$$=\frac{\bar{k}\bar{m}-m\bar{l}-(m-1)\bar{m}+\zeta+\beta\left(m\bar{k}+\bar{l}-\zeta-\bar{k}^2+\bar{k}\bar{l}\right)}{\rho},$$

откуда

$$\sigma_k^2=$$

$$=\frac{\left(\bar{m}+\beta\bar{l}\right)\left[\rho+\beta+(1-\beta)p_{ожид}\right]-(1-\beta)^2\left(m-\bar{m}\right)\bar{l}}{(\rho+\beta)(1+\rho)}.$$

Ковариация числа требований в очереди и под обслуживанием

$$K_{ml}=\sum_{k=m}^{N}m(k-m)p_k-\bar{l}\bar{m}=\left(m-\bar{m}\right)\bar{l},$$

так что

$$\sigma_l^2=\sigma_k^2-\sigma_m^2-$$

$$-2K_{ml}=\frac{\left(\bar{m}+\beta\bar{l}\right)p_{ожид}-(1+\rho)\left(m-\bar{m}\right)\bar{l}}{\rho+\beta}.$$

Коэффициент корреляции $r_{ml}=\dfrac{K_{ml}}{\sigma_m\sigma_l}$.

Среднее время обслуживания одного требования $\bar{t}_{обсл}=1/\mu=\bar{m}/A$, дисперсия времени обслуживания $\sigma_{обсл}^2=1/\mu^2$. Функция распределения времени нахождения в очереди одной заявки определяется формулой [2, 3]

$$q\frac{N-\bar{k}}{N}\left[1-F_{ожид}(t)\right]=$$

$$=\sum_{k=m}^{N-1}\frac{N-k}{N}p_k\sum_{j=0}^{k-m}G_{k-m-1,\,j}(t),$$

в которой $G_{ij}(t)=\dfrac{[(m\mu+i\nu)t]^j}{j!}e^{-[m\mu+i\nu]t}$, и тогда

$$F_{ожид}(t)=$$

$$=1-\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}(N-k)p_k\sum_{j=0}^{k-m}G_{k-m+1,\,j}(t)=$$

$$=1-\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{\infty}(N-k)p_k\,e^{-[m\mu+(k-m+1)\nu]t}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k-m}\frac{\{[m\mu+(k-m+1)\nu]t\}^j}{j!}=1-\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N-1}(N-k)p_k\,e^{-[m\mu+(k-m+1)\nu]t}\times$$

$$\times e_{k-m}\{[m\mu+(k-m+1)\nu]t\},$$

откуда

$$f_{ожид}(t)=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N-1}\left\{(N-k)\frac{[m\mu+(k-m+1)\nu]^{k-m+1}}{(k-m)!}\times\right.$$

$$\left.\times p_k\,t^{k-m}e^{-[m\mu+(k-m+1)\nu]t}\right\}$$

В итоге имеем

$$\bar{t}_{ожид}=\int_0^\infty t\,f_{ожид}\,dt=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left\{(N-k)\frac{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^{k-m+1}}{\left(k-m\right)!}\times\right.$$

$$\left.\times p_k\int_0^{\infty}t^{k-m+1}e^{-\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\right]t}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left\{(N-k)\frac{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^{k-m+1}}{\left(k-m\right)!}\times\right.$$

$$\left.\times p_k\frac{\left(k-m+1\right)!}{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^{k-m+2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)\frac{k-m+1}{m\mu+\left(k-m+1\right)\nu}p_k=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{qm!\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)\frac{k-m+1}{m\mu+\left(k-m+1\right)\nu}\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k-m}}=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{q\,m!\,\mu\left(N-\bar{k}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)\ \frac{k-m+1}{m+\left(k-m+1\right)\beta}\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k-m}}=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{qm!\beta\mu\left(N-\bar{k}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)\frac{k-m+1}{m/\beta+k-m+1}\frac{N^{[k]}\alpha^{k-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k-m}}=$$

$$=\frac{\rho^m p_0}{q\,m!\lambda\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left(k-m+1\right)\frac{N^{[k+1]}\alpha^{k+1-m}}{\left(m/\beta+1\right)_{k+1-m}}=$$

$$=\frac{1}{\lambda\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left(k-m+1\right)p_{k+1}=$$

$$\frac{1}{\lambda\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N}\left(k-m\right)p_k=\frac{\bar{l}}{A},$$

как и следовало ожидать. Аналогично

$$\sigma^2_{ожид}+\bar{t}^{\,2}_{ожид}=\int_0^{\infty}t^2 f_{ожид}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N-1}\left\{(N-k)\frac{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^{k-m+1}}{\left(k-m\right)!}\times\right.$$

$$\left.\times p_k\int_0^{\infty}t^{k-m+2}e^{-\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\right]t}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N-1}\left\{(N-k)\frac{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^{k-m+1}}{\left(k-m\right)!}\times\right.$$

$$\left.\times p_k\frac{\left(k-m+2\right)!}{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^{k-m+3}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)\frac{\left(k-m+2\right)\left(k-m+1\right)}{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^2}p_k$$

или

$$\sigma^2_{ожид}=$$

$$=\frac{1}{q\left(N-\bar{k}\right)}\sum_{k=m}^{N-1}\left(N-k\right)\frac{\left(k-m+2\right)\left(k-m+1\right)}{\left[m\mu+\left(k-m+1\right)\nu\right]^2}p_k-$$

$$-\bar{t}^{\,2}_{ожид}.$$

Это выражение можно, конечно, несколько упростить, действуя по той же схеме, что и при вычислении $\bar{t}_{ожид}$. Однако эти действия не могут привести к существенно более компактной и, вследствие этого, более удобной для численных расчетов формулировке. Поэтому формула для $\sigma^2_{ожид}$, точно так же, как и соответствующая зависимость в модели [2, 3] открытой СМО с ограниченным средним временем пребывания в очереди, оставлена здесь в таком виде. В итоге имеем

$$\bar{t}_{сист}=\bar{t}_{ожид}+\bar{t}_{обсл}=\bar{k}/A$$

и

$$\sigma^2_{сист}=\sigma^2_{обсл}+\sigma^2_{ожид},$$

что очевидно.

В заключение укажем, что полученную в настоящей работе систему формул, так же, как и в случае открытых систем массового обслуживания, можно распространить на системы с ограниченным средним временем пребывания в системе в целом (как в очереди, так и в обслуживающем устройстве), если в ней всюду совершить замену ρ на $\hat{\rho}=\frac{\lambda}{\mu+\nu}$ и β на $\hat{\beta}=\frac{\nu}{\mu+\nu}$.

Литература

1. *Гильмутдинов Р.Ф., Кирпичников А.П.* Многоканальные системы массового обслуживания замкнутого типа // Вестник Казанского технологического университета. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. - № 8. - С. 326-331.
2. *Кирпичников А.П.* Прикладная теория массового обслуживания. - Казань: Издательство Казанского университета, 2008. – 112с.
3. *Кирпичников А.П.* Методы прикладной теории массового обслуживания. - Казань: Издательство Казанского университета, 2011. – 200с.

© **Р. Ф. Гильмутдинов** – стар. преп. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, ruslan.gilmutdinov@rambler.ru; **А. П. Кирпичников** – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, kirpichnikov@kstu.ru.