**ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ
УРАВНЕНИЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИНДУКЦИОННОГО РАЗРЯДА**

Ключевые слова: высокочастотный индукционный разряд, электромагнитное поле, дифференциальные уравнения, группы преобразований, универсальные инварианты.

Приведены результаты группового анализа уравнений квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда конечной длины, в рамках которого построены алгебры Ли инфинитезимальных операторов и вычислены группы преобразований, допускаемые уравнениями электромагнитного поля в разряде, а также найдены независимые базисные скалярные инварианты (в совокупности образующие универсальные инварианты) этих групп преобразований.

Keywords: high-frequency inductive discharge, electromagnetic field, differential equations, groups of transformations, universal invariants.

The results of the group analysis of equations of the quasi-stationary electromagnetic field of high-frequency inductive discharge of a finite length, in which we construct the Lie algebra of infinitesimal operators and the groups of transformations, admitted by the equations of the electromagnetic field in the discharge, and also found independent basic scalar invariants (collectively forming the universal invariants) these groups of transformations.

Следуя системе обозначений, принятой в работе [1], перепишем полную двухмерную систему уравнений электромагнитного поля в разряде [2]

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\omega}{c} H_z \operatorname{Sin}(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}),$$

$$\frac{\partial \varphi_{E_\varphi}}{\partial r} = -\frac{\omega}{c} \frac{H_z}{E_\varphi} \operatorname{Cos}(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z} \operatorname{Cos}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}) +$$

$$H_r \frac{\partial \varphi_{H_r}}{\partial z} \operatorname{Sin}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}) - \frac{4\pi}{c} \sigma E_\varphi \operatorname{Cos}(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}),$$

$$\frac{\partial \varphi_{H_z}}{\partial r} = -\frac{1}{H_z} \frac{\partial H_r}{\partial z} \operatorname{Sin}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}) + \quad (1)$$

$$\frac{H_r}{H_z} \frac{\partial \varphi_{H_z}}{\partial z} \operatorname{Cos}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{E_\varphi}{H_z} \operatorname{Sin}(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi});$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} = -\frac{H_r}{r} - \frac{\partial H_z}{\partial z} \operatorname{Cos}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}) +$$

$$H_z \frac{\partial \varphi_{H_z}}{\partial z} \operatorname{Sin}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}),$$

$$\frac{\partial \varphi_{H_r}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial z} \operatorname{Sin}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r}) -$$

как

$$\frac{H_z}{H_r} \frac{\partial \varphi_{H_z}}{\partial z} \operatorname{Cos}(\varphi_{H_z} - \varphi_{H_r})$$

$$u_1 = -\frac{u}{r} + \alpha v \operatorname{Sin}(y-x);$$

$$x_1 = -\alpha \frac{v}{u} \operatorname{Cos}(y-x);$$

$$v_1 = w_2 \operatorname{Cos}(y-z) + w z_2 \operatorname{Sin}(y-z) - \beta u \operatorname{Cos}(y-x);$$

$$y_1 = -\frac{w_2}{v} \operatorname{Sin}(y-z) +$$

$$+ \frac{w}{v} z_2 \operatorname{Cos}(y-z) + \beta \frac{u}{v} \operatorname{Sin}(y-x); \quad (1)$$

$$w_1 = -\frac{w}{r} - v_2 \operatorname{Cos}(y-z) + v y_2 \operatorname{Sin}(y-z);$$

$$z_1 = -\frac{v_2}{w} \operatorname{Sin}(y-z) - \frac{v}{w} y_2 \operatorname{Cos}(y-z).$$

В уравнениях (1) $\alpha = \omega/c$; $\beta = 4\pi \sigma/c$; E_φ , φ_{E_φ} , H_z , φ_{H_z} , H_r , φ_{H_r} – амплитудное значение и фазовый угол соответственно вихревого электрического, продольного и поперечного магнитного полей внутри плазоида; σ – проводимость в разряде; ω – частота колебаний ВЧ-поля; c – скорость света в пустоте в гауссовой системе единиц. В уравнениях (2) в соответствии с [1] $t = z$; $u = E_\varphi$; $v = H_z$; $w = H_r$; $x = \varphi_{E_\varphi}$; $y = \varphi_{H_z}$ и $z = \varphi_{H_r}$, индекс “1” обозначает

радиальные производные соответствующих величин, индекс “2” – аксиальные.

Записанная в таком виде система (2) допускает трёхмерную алгебру Ли L^3 инфинитезимальных операторов, базис которой в конечномерном пространстве решений определяющих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}; \\ X_2 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}; \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3)$$

которому соответствует таблица порождающих операторов

	$\tilde{t}$	$\tilde{u}$	$\tilde{x}$	$\tilde{v}$	$\tilde{y}$	$\tilde{w}$	$\tilde{z}$	$\tilde{r}$
X_1	1	0	0	0	0	0	0	0
X_2	0	u	0	v	0	w	0	0
X_3	0	0	1	0	1	0	1	0

(в таблицах координаты операторов обозначаются теми же буквами, что и переменные, но с волной сверху).

Системе базисных операторов (3) соответствует трёхпараметрическая абелева (коммутативная) группа G^3 следующих преобразований:

$$\begin{aligned} r' &= r \text{ (тождественное преобразование);} \\ t' &= t + a_1 \text{ (параллельный перенос);} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u' &= u \exp(a_2); & v' &= v \exp(a_2); \\ w' &= w \exp(a_2) \text{ (группа растяжений и сжатий);} \end{aligned}$$

$$x' = x + a_3; \quad y' = y + a_3; \quad z' = z + a_3 \text{ (группа параллельных переносов)}$$

(a_1 , a_2 , и a_3 – параметры группы).

Очевидно, что всего существует $8-3=5$ независимых базисных скалярных инвариантов группы (4), которые в совокупности образуют универсальный инвариант

$$J = \left(r, \frac{u}{v}, \frac{w}{v}, y-x, y-z \right)$$

или, в обычных обозначениях (в физических переменных),

$$J = \left(r, \frac{E_\varphi}{H_z}, \frac{H_r}{H_z}, \varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}, \varphi_{H_z} - \varphi_{H_r} \right).$$

2. В тех же системах обозначений уравнения электромагнитного поля в одномерной постановке задачи, очевидно, имеют вид

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\omega}{c} H_z \sin(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}),$$

$$\frac{\partial \varphi_{E_\varphi}}{\partial r} = -\frac{\omega}{c} \frac{H_z}{E_\varphi} \cos(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} \sigma E_\varphi \cos(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi}),$$

$$\frac{\partial \varphi_{H_z}}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{E_\varphi}{H_z} \sin(\varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi});$$

или

$$u_1 = -\frac{u}{r} + \alpha v \sin(y-x);$$

$$x_1 = -\alpha \frac{v}{u} \cos(y-x);$$

$$v_1 = -\beta u \cos(y-x);$$

$$y_1 = +\beta \frac{u}{v} \sin(y-x).$$

Эта система также допускает трёхмерную алгебру Ли L^3 , базисным векторам которой

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t};$$

$$X_2 = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v};$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

соответствует таблица операторов

	$\tilde{t}$	$\tilde{u}$	$\tilde{x}$	$\tilde{v}$	$\tilde{y}$	$\tilde{r}$
X_1	1	0	0	0	0	0
X_2	0	u	0	v	0	0
X_3	0	0	1	0	1	0

Указанные базисные операторы отвечают трёхпараметрической абелевой группе G^3 , состоящей из преобразований:

$$r' = r \text{ (тождественное преобразование)}$$

$$t' = t + a_1 \text{ (параллельный перенос);} \quad (5)$$

$$u' = u \exp(a_2); \quad v' = v \exp(a_2) \quad (\text{группа растяжений и сжатий});$$

$$x' = x + a_3; \quad y' = y + a_3 \quad (\text{группа параллельных переносов})$$

(a_1 , a_2 и a_3 – параметры группы).

Существует 6-3=3 независимых базисных скалярных инварианта группы (5), образующих её универсальный инвариант

$$J = \left(r, \frac{u}{v}, y - x \right)$$

или

$$J = \left(r, \frac{E_\varphi}{H_z}, \varphi_{H_z} - \varphi_{E_\varphi} \right).$$

3. И, наконец, рассмотрим уравнения, описывающие структуру квазистационарного электромагнитного поля ВЧИ разряда конечной длины в приосевой области плазмоида, то есть систему [3,4]

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial z} = a H_z(0, z) r^3;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

в которой $a = \omega^2 \pi^2 \sigma^2(0, z) / c^4$ или, в наших обозначениях,

$$v_1 - w_2 = a v(0, z) r^3;$$

$$w_1 + \frac{w}{r} = -v_2.$$

Допускаемая алгебра Ли L^2 в данном случае двумерна, её базисные операторы имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

и

$$X_2 = v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w}.$$

Таблица этих операторов:

	$\tilde{t}$	$\tilde{v}$	$\tilde{w}$	$\tilde{r}$
X_1	1	0	0	0
X_2	0	v	w	0

Базисные операторы отвечают двухпараметрической абелевой группе преобразований G^2 :

$$r' = r \text{ (тождественное преобразование);}$$

$$t' = t + a_1 \text{ (параллельный перенос);} \quad (6)$$

$$v' = v \exp(a_2); \quad w' = w \exp(a_2) \quad (\text{группа растяжений и сжатий})$$

(a_1 , a_2 – параметры группы).

Очевидно, что при этом существует 4-2=2 независимых базисных скалярных инварианта группы (6), составляющих универсальный инвариант этой группы

$$J = \left(r, \frac{w}{v} \right),$$

в обычных обозначениях (в физических переменных) –

$$J = \left(r, \frac{H_r}{H_z} \right).$$

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400с.
2. Кирпичников А.П. Предельные соотношения для ВЧ индукционного разряда // Изв. вузов. Физика. - 1993. - № 1. - С. 56.
3. Кирпичников А.П. Структура квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда вблизи плазменного сгустка // ТВТ. - 1995. - Т. 33. - № 1. - С. 139.
4. Кирпичников А.П. О структуре высокочастотного индукционного разряда при атмосферном давлении вблизи оси плазменного сгустка // ТВТ. - 1996. - Т. 34. - № 6. - С. 989.