

УДК 539.3:517.972

Н. Н. Рено, А. К. Сафиуллина

О НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В ПРОБЛЕМЕ МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОЗАТРАТ МОДЕЛИРУЕМОГО ПРОЦЕССА

Ключевые слова: минимизация энергетических затрат, процесс «деформация-напряжение», математическая модель, кинематическая возможность.

Минимизация энергетических затрат моделируемого процесса обеспечивается двумя качественно различными множествами аргументов функционала Лагранжа: для одного множества отсутствуют граничные условия, компоненты другого множества тождественно удовлетворяют заданным граничным условиям.

Keywords: minimization of power expenses, process "deformation tension", mathematical model, kinematic possibility.

Minimization of power expenses of modelled process is provided with two qualitatively various sets of arguments of a functional of Lagrang: for one set there are no boundary conditions, components of other set identically satisfy to the set boundary conditions.

Статья, как и предыдущие публикации [1 – 5, 11,12], посвящена теоретическому научно-исследовательскому направлению по реализации идеи о построении математической модели процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергетических затрат моделируемого процесса природы. В качестве демонстрационного объекта моделирования выбран достаточно хорошо изученный природный процесс «деформация-напряжение».

Для формирования математической модели какого-либо процесса, основанной на минимизации энергетических затрат, необходимо выявить математическое качество компонент этого процесса. В статье [4] представлены требования для одной из двух составляющих компонент моделируемого процесса – напряжений.

В этой статье, в отличие от статьи [4], рассматривается другая составляющая моделируемого процесса «деформация-напряжение», формирующая его энергетические характеристики – это деформация ε , характеризуемая компонентами симметричного тензора второй валентности ε_{ij} .

В качестве функционала, представляющего энергетику, выбран хорошо известный уже более 200 лет функционал Лагранжа [6], способный достигать абсолютного минимума на множестве определения своих аргументов.

Для формирования математической модели, основанной на минимизации энергетических затрат, необходима кинематическая возможность кинематических составляющих моделируемого процесса, которая обеспечивается двумя качественно различными множествами аргументов функционала Лагранжа: достаточно гладкими функциями, когда отсутствуют граничные условия, и геометрически возможными функциями, когда граничные условия заданы и тождественно выполнены.

Если напряжения должны быть равновесны,

[4], то деформации должны удовлетворять условию сплошности (неразрывности) деформируемого объема сплошной среды. Такими условиями является способность деформации удовлетворить условиям совместности деформаций Сен-Венана.

В статье представлены новые тождества (3б,в), демонстрирующие взаимозависимость дифференциальных выражений в левых частях условий совместности деформаций Сен-Венана. Отмечается, что кинематическая возможность деформаций обеспечивается двумя качественно различными множествами перемещений точек деформируемого тела: достаточно гладкими перемещениями, для которых отсутствуют граничные условия, и геометрически возможными перемещениями, которые удовлетворяют заданным граничным условиям.

Ньютоновская механика рассматривает деформируемые объекты в евклидовом пространстве, т.е. в таком трехмерном пространстве, в котором можно ввести единую систему декартовых координат. Опыт показывает, что физическое действительное пространство в не очень больших масштабах с большой точностью можно считать евклидовым [7] (стр. 20, 3-й абзац снизу).

Условием евклидовости пространства является выполнимость условий неразрывности (совместности) деформаций [7] (стр. 90, 4-й абзац снизу).

В случае бесконечно малых деформаций эти условия имеют вид:

$$S_{rs} \equiv \varepsilon_{jrk} \varepsilon_{isp} \partial_k \partial_p (\varepsilon_{ji}) = 0 \quad (1)$$

и называются условиями совместности деформаций Б.Сен-Венана [8] (стр.38, формула (1).; эту систему называют также уравнениями неразрывности деформаций). Всего в (1) содержится восемьдесят одно уравнение, но лишь шесть из них различны [9] (стр. 133):

$$S_{33} \equiv \partial_{22} \varepsilon_{11} + \partial_{11} \varepsilon_{22} - 2 \partial_{12} \varepsilon_{12} = 0; \quad (2a)$$

$$S_{22} \equiv \partial_{11} \varepsilon_{33} + \partial_{33} \varepsilon_{11} - 2 \partial_{13} \varepsilon_{13} = 0; \quad (2б)$$

$$S_{11} \equiv \partial_{22}\varepsilon_{33} + \partial_{33}\varepsilon_{22} - 2\partial_{23}\varepsilon_{23} = 0; \quad (2в)$$

$$S_{23} \equiv -\partial_{23}\varepsilon_{11} - \partial_1(\partial_1\varepsilon_{23} - \partial_2\varepsilon_{13} - \partial_3\varepsilon_{12}) = 0; \quad (2г)$$

$$S_{13} \equiv -\partial_{13}\varepsilon_{22} - \partial_2(-\partial_1\varepsilon_{23} + \partial_2\varepsilon_{13} - \partial_3\varepsilon_{12}) = 0; \quad (2д)$$

$$S_{12} \equiv -\partial_{12}\varepsilon_{33} - \partial_3(-\partial_1\varepsilon_{32} - \partial_2\varepsilon_{13} + \partial_3\varepsilon_{12}) = 0. \quad (2е)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в справедливости тождеств:

$$\begin{cases} \partial_1(S_{11}) + \partial_2(S_{12}) + \partial_3(S_{13}) \equiv 0; \\ \partial_1(S_{12}) + \partial_2(S_{22}) + \partial_3(S_{23}) \equiv 0; \\ \partial_1(S_{13}) + \partial_2(S_{23}) + \partial_3(S_{33}) \equiv 0. \end{cases} \quad (3а)$$

В других обозначениях схема построения системы тождеств (3а) описана в [10] (формула (1.17) стр. 28.). Система тождеств (3а) показывает, что выражения S_{ij} из левой части условий совместности (2) Сен-Венана взаимозависимы, т.е. могут быть получены в результате действий дифференцирования и умножения на число. Примером тому являются тождества:

$$\begin{cases} +\partial_{33}(S_{33}) + \partial_{22}(S_{22}) - \partial_{11}(S_{11}) \equiv -2\partial_{23}(S_{23}); \\ +\partial_{33}(S_{33}) - \partial_{22}(S_{22}) + \partial_{11}(S_{11}) \equiv -2\partial_{13}(S_{13}); \\ -\partial_{33}(S_{33}) + \partial_{22}(S_{22}) + \partial_{11}(S_{11}) \equiv -2\partial_{12}(S_{12}). \end{cases} \quad (3б)$$

а также тождества:

$$\begin{cases} \partial_{11}(S_{11}) - \partial_{22}(S_{22}) - 2\partial_{23}(S_{23}) \equiv \partial_{33}(S_{33}); \\ +\partial_{22}(S_{22}) - \partial_{11}(S_{11}) + \partial_{11}(S_{23}) \equiv \partial_{13}(S_{13}); \\ -\partial_{13}(S_{13}) - \partial_{11}(S_{11}) \equiv \partial_{12}(S_{12}); \end{cases} \quad (3в)$$

представленные в [11], [12].

Система тождеств (3б,в) дополняет известную систему тождеств (3а) и указывает на возможность существования иных аналогичных тождеств, демонстрирующих взаимозависимость левых частей S_{ij} в уравнениях совместности деформаций Б.Сен-Венана (2)

Система (1) однородна и записана относительно достаточно гладких деформаций ε_{ij} . Общее решение $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$ системы (1) представляется соотношениями О.Коши:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^u \equiv (\partial_i u_j + \partial_j u_i) / 2; \quad (4)$$

деформации $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$, которые являются решением системы уравнений (1), называют кинематически возможными деформациями.

Такие деформации выражаются через функции деформаций $u_i(x)$ соотношениями (4) аналогично тому, как статически возможные напряжения, удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия:

$$\partial_{ji}\sigma_{ji}^o \equiv 0, \quad x \in V,$$

выражаются через функции напряжений (например, функции напряжений Максвелла и т.п.). В теории упругости функции деформаций $u_i(x)$ трактуются как внутренние перемещения точек деформируемого объема. Кинематически возможные деформации (4) тождественно удовлетворяют условиям совместности деформаций (1):

$$(S_{rs} \equiv \varepsilon_{jrk} \varepsilon_{isp} \partial_k \partial_p (\varepsilon_{ji})) \Big|_{\varepsilon_{rs} \equiv \hat{\varepsilon}_{ij}^u} \equiv 0, \quad (5)$$

Если достаточно гладкие перемещения u_i удовлетворяют геометрическим граничным условиям: $u_i - u_i^s = 0, \quad x \in S_u,$ (6а)

то такие перемещения называются геометрически возможными $\tilde{y}_i$. На множестве геометрически возможных перемещений $\tilde{y}_i$ уравнения (6а) обращаются в тождества:

$$\tilde{y}_i - u_i^s = 0, \quad x \in S_u. \quad (6б)$$

Если кинематически возможные деформации выражаются через геометрически возможные перемещения $\tilde{y}_i$ соотношениями Коши (4), то такие деформации будем обозначать так:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^u \equiv (\partial_i \tilde{y}_j + \partial_j \tilde{y}_i) / 2. \quad (7)$$

Еще раз отметим различие между представляющими деформации функциями $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ и обозначениями $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$ (4) и $\tilde{\varepsilon}_{ij}^u$ (7). Функции $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ как и внутренние перемещения u_i и $\tilde{y}_i$ входят в состав дифференциальных уравнений ([3], § 3.16, стр. 133):

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i) / 2,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = (\partial_i \tilde{y}_j + \partial_j \tilde{y}_i) / 2.$$

Эти уравнения связывают шесть компонент тензора деформаций ($\hat{\varepsilon}_{ij} \equiv \hat{\varepsilon}_{ji}$ или $\tilde{\varepsilon}_{ij} \equiv \tilde{\varepsilon}_{ji}$) с тремя компонентами вектора внутренних перемещений (u_i или $\tilde{y}_i$) соответственно. Если эти уравнения выполнены, то деформации, стоящие в левой части этих уравнений становятся кинематически возможными деформациями $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^u$, для идентификации которых используются обозначения (4) и (7).

Необходимо также отметить различие кинематически возможных деформаций $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$ и $\tilde{\varepsilon}_{ij}^u$, обозначенных как (4) и (7) соответственно: кинематически возможные деформации $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$ (4) выражаются через достаточно гладкие перемещения u_i , для которых отсутствуют граничные условия. В отличие от деформаций $\hat{\varepsilon}_{ij}^u$ (4), кинематически возможные деформации $\tilde{\varepsilon}_{ij}^u$ (7) выражаются через геометрически возможные перемещения, для которых граничные условия не только заданы, но и тождественно выполнены.

Итак, кинематическая возможность деформаций обеспечивается двумя качественно различными перемещениями точек деформируемого тела; это достаточно гладкие перемещения u_i , для которых отсутствуют граничные условия, и геометрически возможные перемещения $\tilde{y}_i$, которые удовлетворяют заданным граничным условиям.

Литература

1. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 11, 65-68, (2012).
2. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 107-110, (2012).
3. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 111-114, (2012).
4. Н.Н.Рено, А.К.Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 22, 151-154, (2012).
5. Н.Н.Рено, А.К.Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 22, 144-146, (2012).
6. Лагранж Жозеф Луи, 1736 – 1936: Сб. статей к 200-летию со дня рождения. Изд-во АН СССР, Москва–Ленинград,

1937. 220с.
7. Л.И. Седов. *Механика сплошной среды: в 2 т.* Т.1. Наука, Москва, 1970. 492с.
8. В. Новацкий. *Теория упругости*: пер с полск. Мир, Москва., 1975. 864с.
9. Дж. Мейз. *Теория и задачи механики сплошных сред*: пер. с англ. Мир, Москва, 1974, 318с.
10. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*: пер. с англ. Мир, Москва. 1987. 542с.
11. Р.Р. Губаев, С.В. Анаников, М.К. Гималеев. *Технология вариационного моделирования на примере минимизации энергетических затрат изотермического процесса «деформация-напряжение»*. Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, Казань, 2009, 300с.
12. Р.Р. Губаев. *Технология вариационных моделей на примере минимизации энергетических затрат изотермического процесса «деформация-напряжение»*. Изд-во Казан. НИТУ, Казань, 2011, 297с.

© **Н. Н. Рено** – канд. техн. наук, доцент каф. химической кибернетики КНИТУ, iginareno@mail.ru; **А. К. Сафиуллина** – канд. техн. наук, доцент той же кафедры