

УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛКИ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

Ключевые слова: упругопластический изгиб, диаграмма растяжения, линейно упрочняющееся тело, изменение поперечного сечения.

Рассмотрено влияние изменения поперечных размеров балки при упругопластическом изгибе на ее несущую способность и жесткость. Расчет по уточненной модели показал заметное снижение этих характеристик вследствие изменения поперечных размеров: по несущей способности около 8 процентов, по жесткости 11 процентов.

Key words: Elasto-plastic-bending, stretching chart, material with linear hardening, change of cross section.

Influence of change of the cross size in considered at an Elasto-plastic bend of a beam on its bearing ability and rigidity. Considerable decrease in these characteristics in shown: on durability about 8%, on rigidity 11%.

Обычно при решении задач изгиба не учитывают изменение формы и размеров поперечного сечения балки [1]. В задачах упругого деформирования такой подход вполне оправдан, так как деформации малы, особенно поперечные, которые и определяют изменение сечения. Однако при пластическом деформировании они значительны и могут вызвать заметное изменение размеров поперечного сечения, а через них повлиять и на само напряженно-деформированное состояние.

В работе [2] была предпринята одна из первых попыток учета таких изменений и показано заметное влияние их на несущую способность и деформативность балки. Там же было сделано замечание о приближенном характере полученных результатов ввиду несовершенства расчетной модели, которая не учитывала смещения нейтральной оси поперечного сечения. В настоящей работе производится уточнение принятой модели, определяется положение нейтральной оси и более точно вычисляются напряжения и деформации.

Рассматривается чистый изгиб балки прямоугольного сечения. Материал балки считается упругопластическим, с линейным упрочнением, его характеристики описаны в предыдущих работах автора, в том числе и в упомянутой. Материал балки находится в линейном напряженном состоянии. Нейтральная ось делит сечение на две части – растянутую и сжатую, которые и при упругом изгибе несколько различаются: в растянутой части балки поперечное сечение уменьшается, в сжатой – увеличивается, центр тяжести сечения и нейтральная ось чуть смещаются в сторону сжатой части. Однако эти изменения при решении задач в малых деформациях не принимаются во внимание, и в таких задачах положение нейтральной оси считается неизменным.

Найдем нейтральную ось поперечного сечения при пластическом изгибе. Сечение балки показано на рис. 1. Прямоугольное сечение превращается в трапециевидное, нейтральная ось сечения смещается вниз. Высота верхней части сечения, до деформации равная $h/2$, становится

равной h_1 , а нижней $h - h_1$. Общая площадь сечения должна оставаться постоянной, так как при пластическом деформировании объем не изменяется. Положение нейтральной оси определяется уравнением суммы проекций внутренних сил на продольную ось, или выражением нормальной силы – при чистом изгибе она равна нулю:

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (1)$$

Входящие в это уравнение величины:

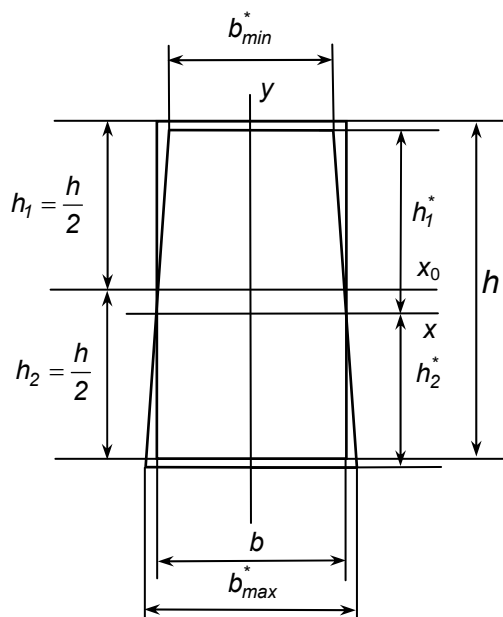


Рис. 1 – Сечение до и после деформирования

σ – напряжение в упругопластическом теле, как известно, определяется выражением

$$\sigma = \sigma_T + E^* \varepsilon,$$

где σ_T – предел текучести, ε – деформация,

$E^* = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{\varepsilon_B}$ – модуль упрочнения, σ_B – предел прочности; b , A – геометрические параметры,

$dA = b^* dy^*$ – элементарная площадка поперечного сечения, $b^* = b(1 - \mu \varepsilon)$, $dy^* = dy(1 - \mu \varepsilon)$, $y^* = y \left(1 - \frac{\mu \varepsilon}{2}\right)$, μ – коэффициент Пуассона, при пластическом деформировании $\mu = 0,5$; ε – деформация, она определяется исходя из гипотезы плоских сечений выражением

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \frac{y}{h_1},$$

где $\varepsilon_{\max}$ – деформация наиболее удаленного от нейтральной оси волокна, h_1 – высота сечения в растянутой части балки (в сужающейся части сечения), y – ордината точки сечения, отсчитываемая от нейтральной оси.

Подставив приведенные выражения в уравнение (1), получим следующее уравнение, связывающее максимальную деформацию $\varepsilon_{\max}$ с высотой h_1 «полусечения»:

$$\int_{h_1-h}^{h_1} \sigma_T b \left(1 + \frac{\bar{E}^* \varepsilon_{\max}}{h_1} y\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{2h_1} y\right)^2 dy = 0.$$

Здесь $\bar{E}^* = E^* / \sigma_T$ – безразмерный модуль упругости.

При интегрировании приведенного выражения учтем, что в «отрицательной» части сечения знак единицы в первых скобках тоже должен быть отрицательным. Поэтому «возьмем» интегралы по отдельности для растянутой и сжатой частей, а затем запишем уравнение как разность этих интегралов:

$$\int_0^{h_1} \sigma_T b \left(1 + \frac{\bar{E}^* \varepsilon_{\max}}{h_1} y\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{2h_1} y\right)^2 dy - \int_0^{h-h_1} \sigma_T b \left(1 + \frac{\bar{E}^* \varepsilon_{\max}}{h_1} y\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_{\max}}{2h_1} y\right)^2 dy = 0.$$

После некоторых преобразований получим следующее уравнение:

$$-1 + 2 + s(a_1 - b_1 s + c s^2) - \frac{s(1-t)^2}{t^2} \{a_2 + \frac{s(1-t)}{t} [b_2 + \frac{s(1-t)}{t} c]\} = 0, \quad (2)$$

где обозначено: $s = \varepsilon_{\max}$, $t = h_1 / h$, $a_1 = \frac{\bar{E}^* - 1}{2}$,

$$b_1 = \frac{\bar{E}^* - 0,25}{3}, \quad c = \frac{\bar{E}^*}{16},$$

$$a_2 = \frac{\bar{E}^* + 1}{2}, \quad b_2 = \frac{\bar{E}^* + 0,25}{3}.$$

Решая это уравнение методом Ньютона при различных значениях s , построим график зависимости относительной высоты $\bar{h}$ от максимальной деформации $\varepsilon_{\max}$, который приведен на рис. 2, эту зависимость можно представить линейной функцией

$$\bar{h} = 0,5 + 0,4266 \varepsilon_{\max} \quad (3)$$

или квадратичной

$$\bar{h} = -1,2934 \varepsilon_{\max}^2 + 0,6723 \varepsilon_{\max} + 0,5. \quad (3a)$$

Таким же образом получим выражение изгибающего момента:

$$M = \int_A \sigma y dy. \quad (4)$$

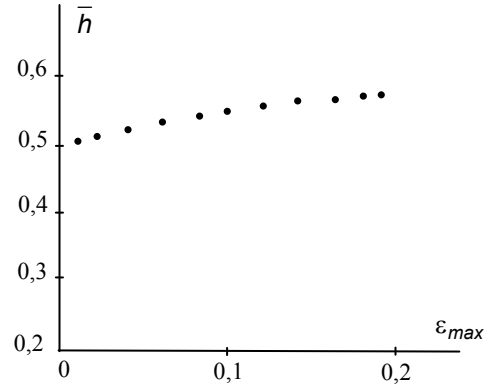


Рис. 2 – График зависимость высоты полусечения от максимальной деформации

Подставив в эту формулу выражения соответствующих величин, как и в случае уравнения (1), получим еще одно уравнение, связывающее искомые величины m , s и t :

$$m = 6 \left\{ \frac{1}{2} + d_1 s - e_1 s^2 + f_1 s^3 - g s^4 + \left(\frac{1-t}{t} \right)^2 \left[\frac{1}{2} + d_2 s \frac{1-t}{t} + e_2 s \left(\frac{1-t}{t} \right)^2 + f_2 s^3 \left(\frac{1-t}{t} \right)^3 + g s^4 \left(\frac{1-t}{t} \right)^4 \right] \right\}, \quad (5)$$

где $d_1 = \frac{\bar{E}^* - 1,25}{3}$, $e_1 = \frac{1,25 \bar{E}^* - 0,5}{4}$,

$$f_1 = \frac{0,5 \bar{E}^* - 0,0625}{5}, \quad g = \frac{0,0625 \bar{E}^*}{6},$$

$$d_2 = \frac{\bar{E}^* + 1,25}{3}, \quad e_2 = \frac{1,25 \bar{E}^* + 0,5}{4},$$

$$f_2 = \frac{0,5 \bar{E}^* + 0,0625}{5}.$$

Полученная система уравнений решается так. Задаемся (с определенным шагом) значением $s = \varepsilon_{\max}$, далее из уравнения (2), решая его методом Ньютона, определяем значение относительной высоты сечения в растянутой части балки $t = \bar{h} = h_1 / h$, а затем при найденных значениях s и t из уравнения (4) находим значение изгибающего момента.

Результаты расчетов приведены в таблице 1, из которой видно, что с увеличением максимальной деформации относительная высота сужающейся части сечения постепенно увеличивается с 0,5 до 0,555, а площадь сечения практически остается постоянной, так же как и ее составных частей. В

таблице приведены значения безразмерного изгибающего момента m , а также его слагаемых m_1 и m_2 по обе стороны от нейтральной оси.

Видно, что составляющие изгибающего момента по обе стороны от нейтральной оси примерно одинаковы, как это предполагалось и в работе [1]. Однако в упомянутой работе общий момент был принят равным удвоенному значению момента, приложенного к сужающейся части поперечного сечения. А поскольку без учета смещения нейтральной оси площадь и высота этой части заметно меньше исходной, то и суммарный

момент оказывается сильно заниженным. Поэтому в работе [2] этот эффект сильно преувеличен: показатели снижения несущей способности и жесткости из-за изменения поперечного сечения составляют 18% по несущей способности и 1,5 раза по жесткости.

В данной работе получено, что снижение несущей способности и жесткости действительно наблюдается, но не такое значительное: 8 % по несущей способности и 11,5 % по жесткости.

Таблица 1 – Измененные размеры сечения при различных значениях максимальной деформации и изгибающего момента

$\varepsilon_{\max}$	$\bar{h}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}$	m_1	m_2	m
0,02	0,50716	0,50337	0,49644	0,9998	0,80334	0,79854	1,60189
0,04	0,51377	0,50610	0,49316	0,9993	0,85436	0,84512	1,69948
0,06	0,51966	0,50834	0,49008	0,9984	0,90319	0,88985	1,79304
0,08	0,52584	0,51021	0,48709	0,9973	0,94995	0,93277	1,88272
0,10	0,53147	0,51176	0,48417	0,9959	0,99470	0,97321	1,96861
0,12	0,53689	0,51305	0,48129	0,9943	1,03751	1,01326	2,05077
0,14	0,54215	0,51413	0,47841	0,9925	1,07840	1,05082	2,12922
0,16	0,54728	0,51503	0,47552	0,9905	1,11743	1,08655	2,20398
0,18	0,55230	0,51576	0,47260	0,9884	1,15481	1,12044	2,27504
0,19	0,55477	0,51608	0,47112	0,9872	1,17252	1,13668	2,30920

В подтверждение приведем некоторые числовые данные, в том числе из таблицы результатов. Предельные значения:

- продольной деформации $\varepsilon_{\max} = 0,19$,

- изгибающего момента $m = 2,3$,

- высоты сужающейся части сечения $\bar{h} = 0,555$.

В расчете с неизменным сечением эти величины, соответственно, равны: 0,19, 2,5 и 0,5. По отношению предельных моментов находим величину снижения несущей способности:

$$K_{nc} = \left(1 - \frac{m_{изм.сеч.}}{m_{посм.сеч.}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{2,3}{2,5}\right) \cdot 100 = 8 \, \%.$$

Снижение жесткости оценим по отношению угла поворота свободного конца заземленной балки. При расчете в случае изменяемого сечения кривизна изогнутой оси балки толщиной 5 см составляет

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{\max}}{h_1} = \frac{0,19}{0,555 \cdot 5} = 0,069 \, 1/\text{см}.$$

При длине балки $l = 1$ м угол поворота равен

$$\theta_{\max} = \kappa l = 0,069 \cdot 100 = 6,9 \, \text{радиан}.$$

Если не учитывать изменение сечения, максимальная деформация составляет $\varepsilon_{\max} = 0,155$. Кривизна изогнутой оси

$$\kappa = \frac{2\varepsilon_{\max}}{h} = \frac{2 \cdot 0,155}{5} = 0,062 \, 1/\text{см},$$

угол поворота $\theta_{\max} = \kappa l = 0,062 \cdot 100 = 6,2$ радиан.

Тогда показатель снижения жесткости

$$K_{ж} = \left(\frac{6,9}{6,2} - 1\right) \cdot 100 = (1,115 - 1) \cdot 100 = 11,5 \, \%.$$

Обычно при решении задач определения напряженно-деформированного состояния нагрузки, приложенные к объекту, и вытекающие из них внутренние силовые факторы бывают заданы или определены раньше, чем напряжения и деформации. Напряжения и деформации находятся последующими расчетами. Наше решение получено в обратном порядке: задавшись значением максимальной деформации $\varepsilon_{\max}$, мы нашли из уравнения (2) значение $\bar{h}$, а затем из уравнения (4) определили значение изгибающего момента. Полученное решение позволяет сделать вполне обоснованное заключение о прочности и жесткости объекта. Однако более ценным является прямое решение, которое и рассмотрим.

При известном значении изгибающего момента система уравнений (2) и (4) имеет две неизвестных величины: $s = \varepsilon_{\max}$ и $t = h_1 / h$. Воспользовавшись уравнением (3), можно исключить одно неизвестное (например, t) и свести задачу к одному уравнению с одним неизвестным.

Практически этот алгоритм реализуется так. В цикле задаются значения безразмерного изгибающего момента m , от $m = 15$, с шагом 0,1 до достижения предельного момента. Предельное значение момента определяется по величине максимальной деформации $\varepsilon_{\max} = 0,19$. Для успешного применения метода Ньютона требуется достаточно верное первое приближение. Поэтому

для первого шага значение максимальной деформации задается близким к нулю, а на каждом следующем шаге в качестве первого приближения берется значение деформации, полученное на предыдущем шаге. При этом значении деформации вычисляется значение процедуры-функции $\bar{h}(\varepsilon_{\max})$, которая соответствует формуле (3), далее с помощью второй процедуры-функции $fm(\bar{h}, \varepsilon_{\max})$, соответствующей уравнению (5), определяется следующее приближение деформации, этот процесс повторяется до выполнения заданного условия точности решения. По достижении заданной точности вычисляются площади частей сечения по обе стороны от нейтральной оси, суммарная площадь, а также значение изгибающего момента m^* при найденных значениях $\varepsilon_{\max}$ и $\bar{h}$.

Совпадение этого значения с исходным является подтверждением правильности решения.

Описанный алгоритм реализован в программе, составленной на языке «Fortran-90». Результаты расчета приведены в таблице 2. В таблице приведены значения изгибающего момента, максимальной деформации, высоты сужающейся части сечения, составные части и полная площадь сечения. В последнем столбце приведены контрольные значения изгибающего момента, отличие их от исходных не превышает 0,3 %.

Сравнение результатов, полученных по двум методикам и приведенных в табл. 1 и 2, показывает их полное совпадение. Значения предельного момента и положение нейтральной оси совпадают, также близки результаты по площадям обеих частей сечения, общая площадь сечения в обоих вариантах расчета остается неизменной.

Таблица 2 – Определение деформаций и новых размеров сечения по величине момента

m	$\varepsilon_{\max}$	$\bar{h}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}$	m^*
1,5	0,00150	0,5000	0,499	0,500	0,999	1,49997
1,6	0,01920	0,5058	0,500	0,500	1,000	1,59834
1,7	0,03874	0,5116	0,499	0,500	0,999	1,69660
1,8	0,05969	0,5179	0,498	0,500	0,998	1,79448
1,9	0,08192	0,5244	0,498	0,499	0,997	1,89281
2,0	0,10367	0,5311	0,497	0,498	0,996	1,99075
2,1	0,12726	0,5382	0,497	0,496	0,993	2,08854
2,2	0,13216	0,5457	0,495	0,494	0,989	2,18621
2,3	0,17859	0,5536	0,494	0,492	0,986	2,28370
2,32	0,18739	0,5562	0,494	0,492	0,986	2,31482

Основные выводы

1. При упругопластическом изгибе поперечное сечение балки изменяется: в растянутой части балки ширина сечения уменьшается, а высота увеличивается, в сжатой части – наоборот.
2. Нейтральная ось сечения смещается в сторону сжатой части балки и делит сечение на две равновеликие части.
3. Общая площадь поперечного сечения остается постоянной.
4. В результате изменения размеров поперечного сечения и смещения нейтральной оси несущая способность и жесткость балки уменьшаются, соответственно, на 8 и 11 процентов

по сравнению с теми результатами, которые дает обычный расчет, без учета этих изменений.

Литература

1. Валиуллин А.Х. Балочные элементы высокого порядка для расчета рам методом конечных элементов / А.Х.Валиуллин // Вестник Казанского технологического университета. 2010, № 9, С.444-452.
2. Валиуллин А.Х. Исследование упругопластического изгиба с учетом изменения поперечного сечения балки / А.Х.Валиуллин // Вестник Казанского технологического университета. 2013, т. 16, № 2, С. 145 - 148.