

Ф. А. Гарифуллин, Ф. Х. Тазюков, Р. С. Шайхетдинова

ИЗУЧЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ВНЕЗАПНОМ СУЖЕНИИ. (Входные течения)*Ключевые слова: реология, число Рейнольдса, поток неньютоновской жидкости, внезапное сужение канала.**В настоящий момент отмечается значительный интерес к проблеме сходящихся течений. Эти течения получили большое прикладное значение в различных областях науки и технологии. В данном обзоре представлены работы, посвященные исследованиям сходящихся течений ньютоновских жидкостей в каналах со ступенчатой конфигурацией.**Keywords: rheology, the Reynolds number, the flow of non-Newtonian fluid, a sudden narrowing of the canal.**In this moment we can see the interest to the problems of couerging flows. These flows have a great applications in various fields of science and technologies. In this overview is submitted works, devoted to couerging flow investigations of Newtonian viscous liquid through abrupt contraction channels.*

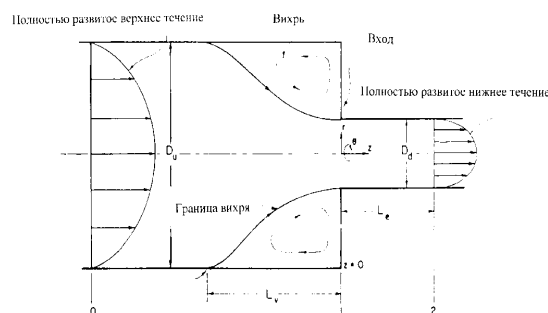
Интерес к проблеме входного течения жидкостей возник еще в 1860 году, когда Гагенбах [13] и спустя 30 лет Куэтт [10] и Буссинеск [5], исследовали перепад давления во входных течениях в круглых трубах при разработке капиллярных реометров для точного измерения вязкости ньютоновской жидкости [15].

После публикации в 1904 году Прандтлем своей теории погранслоя, появилось большое число статей, посвященных течению ньютоновской жидкости с плоским профилем входной скорости в сечении 1 до полностью развитого течения в сечении 2. Течение на верхнем потоке у входа в трубу не исследовалось. Это – так называемая проблема входного течения, которая посвящена определению входной длины L_e . Мало обращалось внимание на вопрос, является ли профиль входной скорости плоским при любых условиях. Большинство авторов, в основном занималось разработкой приближенных методов решения уравнения погранслоя, а не изучением подробной кинематики входных течений. Полная библиография по гидродинамике входных течений опубликована в работе [12] и включает 145 ссылок по проблеме.

Превосходные обзоры экспериментальных и теоретических работ, посвященных течениям неньютоновских жидкостей в каналах с внезапным сужением до 1980 года, опубликованы в работах [3].

В работе [20] дан краткий обзор некоторых достижений в вычислительной реологии и описание некоторых новых подходов для получения совпадений между численными и экспериментальными работами, посвященных задачам течения в сужениях.

Основные элементы ламинарного течения через внезапное сужение круглой трубы представлены на рис.1. Течение развивается, будучи полностью установившемся в сечении, отстоящем на некотором расстоянии в верхнем течении от сужения, где полностью развивается в нижнем потоке в пределах расстояния L_e от места сужения. Входная длина L_e принимается как расстояние от плоскости сужения ($z = 0$), в котором скорость в центральной линии имеет 98-99% до своего полностью развитого значения.

**Рис. 1 - Схема течения**

В зависимости от числа Рейнольдса потока и типа жидкости может возникать вторичное вихревое течение в углах верхнего течения в трубе. Здесь основной задачей является подробный анализ кинематики течения и перепада давления, используя уравнение движения и конститутивное уравнение для определения тензора напряжения. Решение задачи зависит от самой геометрии входного течения, числа Re и типа жидкости, текущей через сужение.

Жидкость проходит из одного канала в другой меньшего радиуса и генерирует сложное течение, имеющее области с сильным сдвигом вблизи стенки и одноосное растяжение вдоль центральной линии. В результате, несмотря на простую геометрию течения, неньютоновские жидкости проявляют значительное отличие в поведении от ньютоновских жидкостей при течении через внезапные сужения. На практике внимание этой проблеме фокусируется на решении следующих задач: 1) исследование поведения вихря вблизи угла на входе в сужение (так называемый, краевой вихрь) и в выступающих углах; 2) определение перепада давления через сужения (как функция числа Деборы), требуемый поддержать (сохранять) данную скорость течения; 3) вычисление траектории частиц в верхнем потоке сужения; 4) определение скачков скорости вдоль оси симметрии. Вследствие легкой доступности для численного моделирования и важности течения в сужениях, эта проблема стала как тестовая (benchmark problem) для упруговязких жидкостей уже с 1988 года [14].

Понимание входных течений упруговязких жидкостей важно для измерений их фундаментальных свойств методом капиллярной вискозиметрии [17] в процессах экструзии расплавов и растворов полимеров [23, 2].

Большой интерес представляет разработка численных методов решения задач течения неньютоновских жидкостей, где входные течения являются одной из основных задач, которые используются как тестовые для моделирования методом конечных элементов [8].

Приближенные методы погранслоя впервые применялись для чистовязких степенных неньютоновских жидкостей в работах [4,9] вариационные методы использовались для установления верхней границы перепада давления в ползущем течении ньютоновской жидкости в верхнем потоке круглого сужения [21].

В работе [11] расширено использование вариационных методов для степенных жидкостей. Решение для ползущего течения, которое получено только для верхнего потока, дает верхнюю границу перепада давления. Однако в этой работе отсутствует информация о кинематике течения. В работе [18], представлено численное решение (методом конечных разностей) полных уравнений движения ньютоновской жидкости без допущения о том, что профиль входной скорости является плоским (теория погранслоя) или этот профиль полностью развитого течения (ползущее течение). В обзоре, опубликованном Богером [3], приводятся сравнения результатов решения полных уравнений движения методом конечных разностей для ползущего течения и пограничного слоя для ньютоновских и чисто вязких неньютоновских жидкостей в круглых трубах с внезапным сужением с экспериментальными данными. Эти ранние, в основном, приближенные решения проблемы произвели революцию в вычислительной гидродинамике. Задачи входного течения, ограниченного областью полностью развитого течения верхнего и нижнего потоков, теперь можно решать для неупругих жидкостей без введения какого-либо допущения в определяющих дифференциальных уравнениях. Можно сказать, что для ньютоновской и чисто-вязких неньютоновских жидкостей проблема входного течения решена.

1. Ньютоновские жидкости

Подробная кинематика известна из экспериментальных и теоретических результатов [16]. Основными характеристиками являются вихрь на верхнем потоке, присутствующей при малых Re и вогнутость профиля скорости в сечении входа для больших Re , когда инерция жидкости играет важную роль.

На рис.2 приводится сравнение линий тока и вихря вторичного течения полученное в работе [2] с экспериментальным методом, с результатами решения уравнений движения методом конечных элементов для ползущего течения [18]. Такое хорошее совпадение результатов для неупругих жидкостей свидетельствует о высоком уровне разработки теоретических положений об этих течениях.

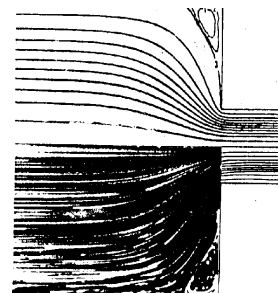


Рис. 2 - Сравнение расчетных и экспериментальных линий тока для ньютоновских жидкостей

Для ползущего течения величина вихря верхнего потока, измеренная в виде $X = L_b / D_b$, не зависит от числа Рейнольдса и от степени сужения $\beta = \frac{D_b}{D_H} \geq 4$. Наблюдаемое вторичное

течение постепенно исчезает, когда инерция жидкости становится значительной. В работе [16] теоретически успешно предсказывалось также появление вогнутости в профиле входной скорости, которое наблюдалось в работе [12] при $Re = 108$ и $\beta = 4,65$.

Для ньютоновской жидкости в круглых входных течениях развитие скорости на осевой линии не зависит от числа Рейнольдса при $Re \leq 1$ и $\beta \geq 4$. При числах Рейнольдса такого порядка и ниже входная длина постоянна $\left(L_e = 0,49 \frac{Dd}{2} \right)$ и

профиль скорости у входа незначительно отличается от профиля полностью развитого течения. Основной характеристикой течения при малых Re является вихрь вторичного течения. Присутствуя в углу трубы верхнего потока, этот вихрь имеет относительную длину присоединения $X = 0,17$, которое не зависит от степени сужения для $\beta \geq 4$ и $Re \leq 1$. Для $Re > 1$ инерция становится важным фактором. Вихрь вторичного течения продвигается в направлении угла трубы верхнего течения, достигая относительной длины 0,05 при $Re = 100$. Входная длина зависит от Re и профиль скорости у входной плоскости переходит из приблизительно полностью развитого к приблизительно к плоскому при $Re = 100$, где наблюдается незначительное отклонение максимума от центра. Предположение о ползущем течении справедливо для решений задач для $Re \leq 1$, тогда как в случае учета инерции следует рассматривать условие $Re > 1$.

Существуют достаточные теоретические и экспериментальные данные об изучении входной длины L_e и перепада входного давления $\Delta P_{вх}$ [1], который определяется следующим образом

$$\Delta P_{вх} = p_0 - p_2 - \Delta P_{(0,1)} - \Delta P_{(1,2)},$$

где $p_0 - p_2$ - общий перепад давления в сечениях $(0-2)$, $\Delta P_{(0,1)} - \Delta P_{(1,2)}$ - общий перепад полностью развитого течения в трубах верхнего и нижнего потоков. Для степени сужения $\beta \geq 2$ величина входной длины получена численным методом в работах [6,19].

$$\frac{L_{\text{вх}}}{R} = 0,49 + 0,11 \text{Re} \quad (1.1)$$

где число Рейнольдса определено в терминах D_H . Для случая $\beta \geq 4$ имеется следующая зависимость [15; 7]

$$\frac{\Delta P_{\text{вх}}}{2\tau_w} = 0,0725 \text{Re} + 0,69. \quad (1.2)$$

В обзоре [3] приводится обобщение результатов различных решений методом погранслоя и результатов, полученных линейной суперпозицией перепада давления для ползущего течения [21]

$$\frac{\Delta P_{\text{вх}}}{2\tau_w} = (C + 1) \frac{\text{Re}}{32} + n_k = 0,0709 \text{Re} + 0,589, \quad (1.3)$$

где $C \approx 1,269$ коэффициент потерь, n_k - поправка Куэтта, τ_w - напряжение на стенке в нижнем потоке.

В работе [24] протабулированы значения C_1 , полученные различными исследователями. Хотя существует незначительная разница значений вычисленных по теории погранслоя, в работе [25] получено значение $C_1 = 1,269$, которое является наиболее подходящим. Экспериментальные результаты работы [26] хорошо подтверждают это значение. Теоретические и экспериментальные значения P_k сравнивались в обзоре [3]. Уравнение (1.3) хорошо описывает экспериментальные данные.

2. Чисто вязкие неньютоновские жидкости

Основной отличительной особенностью этих жидкостей является нелинейная зависимость вязкости от скорости сдвига. Среди многочисленных аппроксимирующих зависимостей функцию вязкости $\eta(\dot{\gamma})$ наиболее адекватно представляют модели Карро и Элліса [27], которые в безразмерном виде можно записать в следующей форме

$$\eta = \left[1 + (Cu \dot{\gamma})^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \eta^{(1-\alpha)} = (El \dot{\gamma})^{\alpha-1}. \quad (2.2)$$

Здесь $\eta = \mu / \mu_0$, где μ_0 - наибольшая ньютоновская, вязкость, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_H / (\nu_H / R_H)$, где $\dot{\gamma}_H$ - скорость сдвига в нижнем потоке, ν_H - скорость течения, $Cu = \lambda_s \nu_H / R_H$, где λ_s - временная постоянная в модели Карро, $El = \mu_0 \nu_H / \tau_{1/2} R_H$, n - безразмерный показатель степени в законе Оствальда - де Ваале, $\tau_{1/2}$ - значение напряжения сдвига при

$\mu = \mu_0 / 2$, $(\alpha - 1)$ - наклон $(\mu_0 / \mu - 1)$ в зависимости $\tau / \tau_{1/2}$ на графике, изображенном в логарифмических координатах. Обе эти модели в отличие от степенного закона Оствальда-де Ваале хорошо описывают области малой скорости сдвига и степенного закона.

Для случая $Cu \dot{\gamma} \ll 1$ модель описывает ньютоновское поведение, а при $Cu \dot{\gamma} \gg 1$ - область степенного закона. Обе модели сравнимы, при $Cu = El$ [16].

Жидкости с высокой псевдопластичностью, которые не обладают упругостью, встречаются довольно редко. Следовательно, экспериментальные наблюдения входных течений в трубах, которые однозначно исследуют взаимодействие инерции жидкости и псевдопластичности едва ли существуют при отсутствии упругости жидкости. Однако существует интересная задача установления роли, которую играет псевдопластичность жидкости в определении кинематики входных течений в трубах.

Следуя разработкам для ньютоновских жидкостей, где полученные результаты из теории погранслоя совмещаются с результатами из допущения ползущего течения, в работе [26] предложена следующая зависимость для определения верхней границы перепада давления в круглом входном течении псевдопластичных жидкостей для $\beta \geq 4$

$$\frac{\Delta P_{\text{вх}}}{2\tau_w} = (C_2 + 1) \frac{[\text{Re}]}{32} + P'_k. \quad (2.3)$$

Здесь P'_k - поправка Куэтта, C_2 - коэффициент

потерь, $\text{Re} = \frac{\rho D_H^{n'} V_d^{2-n'}}{8^{n'-1} K'}$ - обобщенное число

Рейнольдса, n' - наклон графика $\lg \tau_w - \lg(8V / D)$, полученного из капиллярной реометрии, K' - значение этого графика в точке пересечения при $8V / D = 1 \text{c}^{-1}$. Для степенного закона имеем $n = n'$, $K = K' [4n / (3n + 1)]^n$.

В работе [9] получена входная длина для степенной жидкости для случая $\beta = 2,058 \leq n \leq 1$ и для условия $190 \leq [\text{Re}] \leq 1940$ в работе [26].

Значения, C_2 вычисленные в работе [9] приведены в таблице и рекомендованы для использования в уравнении (2.3). Значения поправки Куэтта $P'_k = \frac{\Delta P_{\text{вх}}}{2\tau_w}$, вычислялись в работах [26], [16].

Уравнение (2.3) рекомендовано как верхняя граница для избытка потери давления в крупных сужениях при течении псевдопластичных жидкостей.

Для больших чисел Рейнольдса верхняя граница $\Delta P / 2\tau_w$, вычисленная из уравнения (2.3) довольно точная. Однако для $[\text{Re}] \leq 30$ избыток

перепада давления зависит также от подробности поведения вязкости при низких скоростях сдвига [16].

Таблица 1

Показатель неньютоновости n	Коэффициент потерь c_T	Поправка Куэтта P'_k
1.0	1.33	0.58
0.9	1.25	0.64
0.8	1.17	0.70
0.7	1.08	0.79
0.6	0.97	0.89
0.5	0.85	0.99
0.4	0.70	1.15
0.3	0.53	1.33

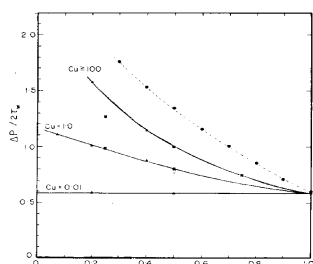


Рис. 3 - Зависимость коэффициента коррекции Куэтта от показателя неньютоновости при различных значениях чисел Cu

Приведены результаты численных исследований при очень малых числах Рейнольдса различных авторов, где значения $P_{ex}/2\tau_w$ приведены в зависимости от показателя степени n при различных числах Карро. В работе [16] рассмотрено влияние инерции жидкости Карро численным решением задачи течения в сужении 4:1 при числах Рейнольдса 0,2; 2,0 и 10^2 . В работе [19;] методом конечных разностей решена задача для элитности Эллиса в предположении ползущего течения. Упомянутые авторы использовали степень сужения $\beta = 4$.

Видно, что когда число Карро увеличивается при фиксированном значении n избыток перепада давления увеличивается от ньютоновского нижнего предела до верхнего предела степенной жидкости. В работах [16, 8] показано, что степенной предел достигается для $Cu \geq 100$. В то же время в работе [19] этот предел превышен для $El=Cn=5000$. Приведены зависимости $\Delta P_{ex}/2\tau_w$ от числа Карро для $n=0,25$; 0,5 и 0,75 при $Re = 0$. Для случая $Cu \leq 100$ данные трех авторов совпадают [1]. Таким образом, влияние псевдопластичности при отсутствии упругости жидкости становится ясным в ползущем течении при входе в трубу. Что касается влияния псевдопластичности на размер вихря вторичного течения. Теперь ясно, что вихрь уменьшается в размере, когда число Карро увеличивается при фиксированном индексе n . Уменьшение размера вихря ускоряется, когда n уменьшается [16].

При увеличении $Cu \geq 100$, когда не существует вихря вторичного течения, наблюдается степен-

ное поведение. В работе [16] показано, что уменьшение вязкости со скоростью сдвига не ответственно за отклонение от центра максимума профиля скорости на плоскость сужения. Это, скорее всего, является эффектом инерции, который имеет место и в ньютоновской жидкости при высоких числах Рейнольдса. Эти же авторы показали, что скачок скорости мал на центральной линии в сечении сужения, по сравнению с экспериментальными данными, полученными в работе [21] для полиэтилена низкой плотности.

В отсутствие данных о вязкости при нулевой скорости сдвига и при справедливости степенной зависимости, можно использовать уравнение (2.3), используя данные таблицы для учета поправки Куэтта [26].

В заключение отметим, что в терминах хорошо известной кинематики, псевдопластичные эффекты не могут объяснить какие-либо явления при течении в упруговязких жидкостях [1]. Этот вывод о влиянии псевдопластичности основан на точности результатов численного исследования методом конечных элементов [16]. Этот результат превосходно подтверждается с данными экспериментальных определений скорости течения методом лазерно-доплеровской анемометрии [13].

Литература

1. Boger D.V. Viscoelastic flows through contractions. *Ann.Rev.Fluid Mech.* **19**, 157-182 (1987).
2. Petric C.J.S., Denn M.M. Instabilities in polymer processing. *AIChE Journal* **22**(2), 209-236 (1976).
3. Boger D.V., Circular entry flow of inelastic and viscoelastic fluids. In *Advances in Transport Processes*. (Ed.Mujumdar A.S., Mashelkar R.A.), **2**, 43-98 (1982). New-Dehli, Wiley Eastern.
4. Bogue D.C. Entrance effects and prediction of turbulence in non-Newtonian flow. *Ind.Eng.Chem.* **51** (7), 874-878 (1959).
5. Boussinesq M.J., Sur la maniere dont les vitesses, dans un tube cylindrique de section circulaire de section circulaire, e vase a son entree, se distribuent depuis cette entree jusqu'aux endroits ou se trouve etabli un regime uniforme. *Comptes Rendus*, **113**, 9-15 (1891).
6. Carter T.R. Laminar flow from a reservoir up to and through a tube entrance region. *PhD. Thesis. Univ. Utah. Salt Lake City*. 319pp (1969).
7. Christiansen E.A., Kersley S.J., Carter T.R. Laminar tube flow through an abrupt contraction. *AIChE Journal*. **18** (2), 372-380 (1972).
8. Chrochet M.J., Walters K. Numerical methods in non-Newtonian fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15**, 241-260 (1983).
9. Collins M., Schowalter W.R. Behaviour of non-Newtonian fluids in the inlet region of a pipe. *AIChE Journal*. **9** (1), 804-809 (1963).
10. Couette M.M. Etudes sur le frottement des liquides. *Ann. De Chim. Et Phys.*, **21**, 433-510 (1890).
11. Duda J.L., Vrentas J.S. Entrance flows of Non-Newtonian fluids. *Trans. Soc. Rheol.* **17**, 89-108 (1973).
12. Fan L.T., Hwang C.L. Bibliography of hydrodynamic entrance region flow. Special Report.67. *Kansas State Univ. Bull.* **50**, 1-17 (1966).
13. Hagenbach E. Uber die Bestimmung der Zahigkeit einer Flussigkeit durch den Ausfluss aus Rohren. *Ann.der Phys. Und Chem.*, **109**, 385-426 (1860).

14. Hassager O. Working group on numerical techniques. Fifth Intern. Workshop on Numerical Methods in Non-Newtonian Flows. Lake Arrowhead, USA. *J.Non-Newtonian Flows*. Lake Arrowhead, USA. *J.Non-Newtonian Fluid Mech.*, **29**, 2-5 (1988).
15. Kestin J., Sokolov M., Wakeham W. Theory of capillary viscometers. *Appl.Sci.Res.* **27**, 241-264 (1973).
16. Kim-E.M.E., Brown R.A., Armstrong R.C. The roles of inertia and Shearthinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction. *J.Non-Newtonian Fluid Mech.* **13**, 341-363 (1983).
17. Meissner J. Rheometry of polymer melts. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **17**, 45-64 (1985).
18. Vrentas J.S., Duda J.L., Bargerion K.G. Effect of axial diffusion of vorticity on flow development in circular conductions. *AIChE Jornal.* **12** (**5**), 837-844 (1966).
19. Vrentas J.S., Duda J.L. Flow of a Newtonian fluid through a Newtonian fluid through a sudden contraction. *Appl. Sci. Res.* **28**, 241-259 (1973).
20. Walters K., Webster M.F. The distinctive CDF challenges of compuaionae rheology, In *Proc. of ECCOMAS Computational Fluid Dynamics, 2001 Conference, Swansea, UK*, 2001.
21. Weissberg H.L. End correction for slow viscour flow through long tubes. *Phys. Fluids*, **5** (**9**), 1033-1036 (1962).
22. White S.A., Gotsis A.D., Baird D.G. Revies of te entry flow problem: experimental and numerical. *J.Non-Newtonian Fluid Mech.*, **24**, 121-160 (1987).
23. White J.L. Critique on flow patterns in polymer fluids at the entrance of a die and instabilities leading to extrudate distortion. *Appl.Polym.Symp.* **20**, 155-174 (1973).
24. Снигерев Б.А., Тазюков Ф.Х., Кутузов А.Г., Амер Аль Раваш. Течение упруговязкой жидкости со свободной поверхностью // Вестник Казанского технологического ун-та., 2007, Вып.1., С.86-93.
25. Ф.Х.Тазюков, Ф.А.Гарифуллин, Шайхетдинова Р.С. Изучение пристенного напряжения при течении неньютоновской жидкости в каналах сложной геометрии // Вестник Казанского технологического ун-та., 2012. т.15.в.7. 2010. в.9.стр.483-490.
26. Boger D.V. Walters K. *Rheological Phenomena in Focus*. (Elsevier, Amsterdam, 1992).
27. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. *Dynamics of Polymeric Liquids: Fluid Mechanics*, vol.1, 2nd ed. (John Wiley – Sons, New York, 1987).

© **Ф. А. Гарифуллин** - член-корр. АН РТ, д.т.н, проф. каф. ТКМ КНИТУ, rami21@yandex.ru; **Ф. Х. Тазюков** – д.т.н., проф. каф. ТМ и СМ КНИТУ, tazurov@mail.ru; **Р. С. Шайхетдинова** - ст. препод. каф. ТКМ КНИТУ.