

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ И ШТАМПОВ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ

Ключевые слова: контактная задача, численное решение, формула Гаусса.

С использованием численно-аналитической методики решена задача контактного взаимодействия круглой пластины на упругом основании с жесткими штампами различных форм. Проблема решения интегрального уравнения, описывающего условия контакта, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Для формирования и решения этой системы написаны две компьютерные программы, работающие совместно. Получены поля распределения напряжений под штампом.

Keywords: contact problem, the numerical solution, the Gauss formula.

With the use of numerical and analytical methods the problem of contact interaction of a circular plate on an elastic foundation with hard stamps of different shapes is solved. The problem of solving the integral equation describing the contact conditions is reduced to solving a system of linear algebraic equations. For the formation and solution of this system are written two computer programs working together. Fields of the stress distribution under the stamp are obtained.

Проблема контактного взаимодействия двух тел является одной из наиболее сложных и вместе с тем одной из наиболее важных проблем механики деформируемого твердого тела. Элементы, из которых состоит любая конструкция, взаимодействуют между собой, а также входят в контакт с другими объектами. Необходимостью учета подобных взаимодействий обусловлено развитие теории контактного взаимодействия. Исследованиями в данной области занимались такие отечественные ученые, как Л.А. Галин, И.Я. Штаерман, И.И. Ворович, В.М. Александров, В.И. Моссаковский, Ю.П. Артюхин, Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев, Г.Я. Попов, М.В. Блох и др. [1-9].

Для многих задач механики очень сложно найти точное аналитическое решение. Поэтому с развитием компьютерной техники большую популярность получили приближенные методы (например, МКЭ, МГЭ и др. [10-17]). В решении задач механики контактного взаимодействия приближенные методы играют значительную роль, а разработка и совершенствование новых численных и численно-аналитических методик решения контактных задач является актуальной проблемой.

Одним из основных приемов решения контактных задач является построение интегрального уравнения относительно контактного давления и его решение. Данный прием может быть осуществлен сравнительно просто, если известна функция влияния. Согласно корректной постановки контактных задач для тонкостенных элементов конструкций [18] условия контакта поверхности штампа и пластины записываются [19] в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$k_0 \sigma(\alpha_1, \beta_1) + \iint_{\Omega} G(\alpha_1, \beta_1, \xi_1, \eta_1) \sigma(\xi_1, \eta_1) d\Omega = f(\alpha_1, \beta_1), \quad (1)$$

$$(\alpha_1, \beta_1), (\xi_1, \eta_1) \in \Omega$$

Здесь $\sigma(\alpha_1, \beta_1)$ – неизвестное контактное давление, $G(\alpha_1, \beta_1, \xi_1, \eta_1)$ – функция влияния, k_0 – коэффициент обжатия, h – толщина пластины, $f(\alpha_1, \beta_1)$ – функция

формы и жесткого смещения штампа, α_1, β_1 – некоторая система координат, связанная со штампом. Интеграл по области контакта Ω моделирует изгиб срединной поверхности пластины, $k_0 \sigma(\alpha_1, \beta_1)$ – перемещения поверхности пластины в результате местного обжатия.

Геометрия взаимодействующих тел зачастую такова, что искать функцию влияния удобнее в системе координат α_2, β_2 , связанной с пластиной, поскольку в этой системе координат проще сформулировать граничные условия для искомой функции и удовлетворить им.

Если функция влияния найдена и известны формулы перехода от системы координат α_2, β_2 к α_1, β_1 , то алгоритм решения уравнения (1) заключается в следующем. Область контакта покрывается сеткой топологических прямоугольников, в каждом из которых проводится интегрирование с помощью квадратурной формулы Гаусса. Требуя выполнения условия контакта пластины и штампа в каждой квадратурной точке, сведем проблему определения значений контактного давления в узлах сетки к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$k_0 \sigma(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}) + \sum_{k=1}^{h_{\alpha_1}} \sum_{l=1}^{h_{\beta_1}} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}, \xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) \sigma(\xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) A_i A_j = f(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}) \quad (2)$$

Здесь A_i – весовые множители квадратурной формулы Гаусса; $h_{\alpha_1}, h_{\beta_1}$ – количество фрагментов разбиения сетки по осям α_1 и β_1 соответственно; N – количество точек в квадратурной формуле Гаусса; $s, t = 1, 2, \dots, N$; $p = 1, 2, \dots, h_{\alpha_1}$; $q = 1, 2, \dots, h_{\beta_1}$.

Рассмотрим случай круглой пластины радиуса R , лежащей на упругом основании с одним коэффициентом постели k . Функция влияния для

данной пластины является (при заданных граничных условиях) решением уравнения

$$\nabla^4 G(r, \varphi, \xi, \eta) + \lambda^4 G(r, \varphi, \xi, \eta) = \frac{1}{D\xi} \delta(r - \xi, \varphi - \eta), \quad (3)$$

где $\lambda^4 = \frac{k}{D}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $\delta(r - \xi, \varphi - \eta)$ – δ -функция Дирака.

Решение уравнения (3) ищется в виде ряда Фурье:

$$G(r, \varphi, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(r, \xi) \cos(\varphi - \eta),$$

где символ \sum' означает, что при $n=0$ вводится коэффициент $1/2$.

Задача построения функции влияния сводится к решению двух уравнений Бесселя. Общие решения соответствующих им однородных уравнений известны [20], а частные решения находятся с помощью интегрального преобразования Ганкеля [21].

Таким образом, функция влияния получена в виде:

$$G_n(r, \xi) = C_{1n}(\xi)u_n(\lambda r) + C_{2n}(\xi)v_n(\lambda r) + \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r)f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r)g_n(\lambda \xi), & 0 < r \leq \xi \\ v_n(\lambda \xi)f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi)g_n(\lambda r), & \xi \leq r \end{cases}$$

где $u_n(z) = ber_n(z)$, $v_n(z) = -bei_n(z)$, $f_n(z) = -hei_n(z)$, $g_n(z) = her_n(z)$ – функции Кельвина. Постоянные интегрирования определяются из условий на контуре пластины при $r = R$.

Рассмотрим применение изложенной выше методики к решению конкретных задач. Пусть круглая пластина на упругом основании взаимодействует с плоским штампом, который имеет форму сектора кольца (рис. 1). Отметим, что при данном подходе частными случаями являются задачи для штампов в форме сектора, круга, а также в форме кольца.

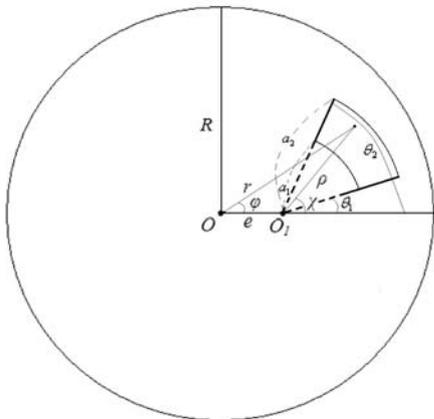


Рис. 1 - Постановка задачи для случая контакта круглой пластины и штампа в форме сектора кольца

Будем определять положение штампа с помощью эксцентриситета e , выбранного как расстояние от центра пла-

стины O до точки O_1 , которая является центром круга при $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = \pi$. Целесообразно в качестве α_1, β_1 выбрать полярную систему координат ρ, χ с центром в точке O_1 . Тогда дискретный аналог уравнения (1) примет вид

$$k_0 \sigma(\rho_{spq}, \chi_{tpq}) + \sum_{k=1}^{h_x} \sum_{l=1}^{h_y} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{r,\varphi} \sigma(\xi_{ikl}, \eta_{jkl}) \xi_{ikl} A_i A_j = \gamma,$$

где

$$G_{r,\varphi} \equiv G(r_{spq}, \varphi_{tpq}, \xi_{ikl}, \eta_{jkl}) = \sum_{m_0=0}^m G_{m_0}(r_{spq}, \xi_{ikl}) \cos m_0(\varphi_{tpq} - \eta_{jkl}),$$

γ – жесткое смещение штампа.

Если штамп имеет прямоугольную форму (рис. 2), дискретный аналог уравнения (1) примет вид

$$k_0 \sigma(x_{spq}, y_{tpq}) + \sum_{k=1}^{h_x} \sum_{l=1}^{h_y} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{x,y} \sigma(\xi_{ikl}, \eta_{jkl}) A_i A_j = \gamma,$$

где

$$G_{x,y} \equiv G(x_{spq}, y_{tpq}, \xi_{ikl}, \eta_{jkl}) = \sum_{m_0=0}^m G_{m_0}(x_{spq}, \xi_{ikl}) \cos m_0(y_{tpq} - \eta_{jkl})$$

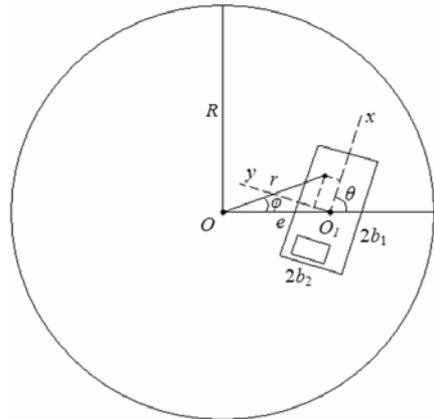


Рис. 2 - Постановка задачи для случая контакта круглой пластины и прямоугольного штампа с вырезом

Добавление вырезов в прямоугольный штамп позволяет ставить и решать задачи для штампов разнообразных форм. Поскольку внутри вырезов контактные напряжения отсутствуют, система разрешающих уравнений составляется без участия в ней соответствующих слагаемых. Таким образом, число неизвестных равно числу уравнений.

Анализ сходимости расчетной схемы проводился на основе численных экспериментов. Исследовалось влияние на конечный результат количества членов ряда функции Грина, а также детализации сетки. Результаты двух таких численных экспериментов, проведенных для задачи контакта пластины со штампом в форме сектора (рис. 3) при условии свободных краев пластины и $e = 0.7$ м, представлены в табл. 1, 2.

Таблица 1 - Влияние количества членов ряда функции Грина m на напряжения. Штамп в форме сектора (рис. 3). 5184 узловые точки

m	23	30	40	50	70	100
Макс. напр., (МПа)	$1,159 \cdot 10^3$	$1,155 \cdot 10^3$	$1,152 \cdot 10^3$	$1,150 \cdot 10^3$	$1,149 \cdot 10^3$	$1,148 \cdot 10^3$
Изменение	-	-0,4%	-0,3%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
Мин. напр., (МПа)	$-2,336 \cdot 10^2$	$-2,264 \cdot 10^2$	$-2,128 \cdot 10^2$	$-2,033 \cdot 10^2$	$-1,972 \cdot 10^2$	$-1,983 \cdot 10^2$
Изменение	-	-3,1%	-6,0%	-4,5%	-3,0%	0,5%

Таблица 2 - Влияние детализации сетки на напряжении. Штамп в форме сектора (рис. 3). $m = 23$

	Количество узлов			
	576	2304	5184	9216
Макс. напр., (МПа)	$1,129 \cdot 10^3$	$1,152 \cdot 10^3$	$1,159 \cdot 10^3$	$1,163 \cdot 10^3$
Изменение	-	2,0%	0,7%	0,3%
Мин. напр., (МПа)	$-2,333 \cdot 10^2$	$-2,335 \cdot 10^2$	$-2,336 \cdot 10^2$	$-2,337 \cdot 10^2$
Изменение	-	0,1%	0,0%	0,1%

При проведении расчетов было принято: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $k = 2 \cdot 10^8$ Н/м³, $h = 0,05$ м, $R = 1$ м, $\gamma = 0,005$ м, количество точек Гаусса по каждой из координат равно 3 (аналогичные параметры расчетов были приняты и при решении остальных рассмотренных в работе задач).

Приведенные данные показывают, что по мере увеличения количества членов ряда функции Грина m максимальные и минимальные напряжения претерпевают все меньшие изменения. Аналогичным образом на конечные результаты влияет и сгущение сетки узлов. Таким образом, данные численных экспериментов позволяют сделать вывод о наличии сходимости расчетной схемы.

Представленный выше алгоритм численного решения контактных задач был реализован в виде двух компьютерных программ, работающих совместно. Первая программа содержит оконный интерфейс, работая с которым пользователь может установить исходные параметры расчета: механические характеристики, размеры штампа и пластины, эксцентриситет и ориентацию штампа на пластине, шаг разбиения сетки, положение вырезов в штампе, если они есть. После того, как исходные параметры установлены, программа производит построение сетки узлов и вычисляет в каждой ее точке значения функций Кельвина с учетом перехода от системы координат α_2, β_2 к системе координат α_1, β_1 . Также производится вычисление функций Кельвина и их производных на границе пластины. Результаты всех вычислений записываются на жесткий диск, после чего запускается вторая программа, непосредственно реализующая алгоритм решения контактной задачи. В начале своей работы данная программа считывает с жесткого диска результаты вычислений предыдущего этапа. После этого запускается алгоритм составления и решения системы линейных алгебраических уравнений (2). Полученные в результате значения контактного давления в узлах сетки записываются в файл в формате, пригодном для использования в программе визуализации.

С помощью представленной выше численно-аналитической методики исследовалось распределение контактных напряжений в зависимости от формы штампа, эксцентриситета его положения, угла поворота и ус-

ловий закрепления пластины. Поля распределения строились по безразмерным контактным напряжениям, которые вычислялись по формулам

$$\sigma^* (\alpha_1, \beta_1) = \frac{S_\Omega \sigma (\alpha_1, \beta_1)}{P},$$

где S_Ω – площадь области контакта, а P – сила, которая дается выражением

$$P = \iint_{\Omega} \sigma (\alpha_1, \beta_1) d\Omega.$$

Для штампов, имеющих форму, основой которой является сектор кольца, выражения для S_Ω и P принимают вид:

$$S_\Omega = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(a_2^2 - a_1^2)}{2}, \quad P = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{a_1}^{a_2} \sigma(\rho, \chi) \rho d\rho d\chi.$$

Для прямоугольных штампов с учетом вырезов

$$S_\Omega = 4b_1b_2 - S_0, \quad P = \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} \sigma(x, y) dx dy,$$

где S_0 – площадь вырезанных из штампа фрагментов.

Ниже на рис. 3-6 представлены поля распределения контактных напряжений для ряда частных случаев.

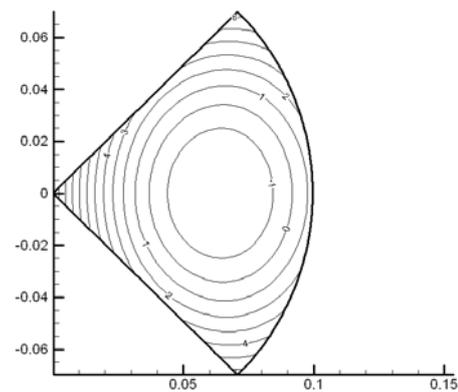


Рис. 3 - Штамп в форме сектора. Края пластины свободны, $e = 0,7$ м

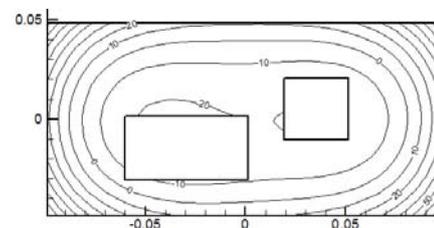


Рис. 4 - Прямоугольный штамп с двумя произвольными вырезами внутри. На краях пластины жесткое закрепление, $e = 0,005$ м

Разработанная методика обладает достаточно широкими возможностями и при минимальной модификации может быть использована и для решения ряда других классов контактных задач.

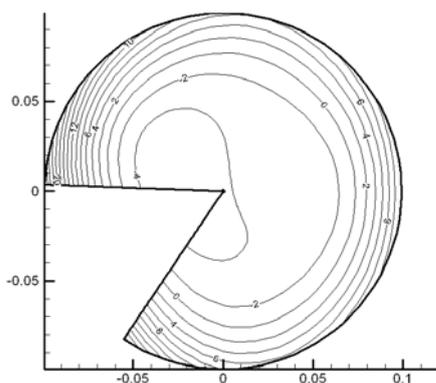


Рис. 5 - Штамп в форме незаконченного круга. Края пластины свободны, $e = 0,7$ м

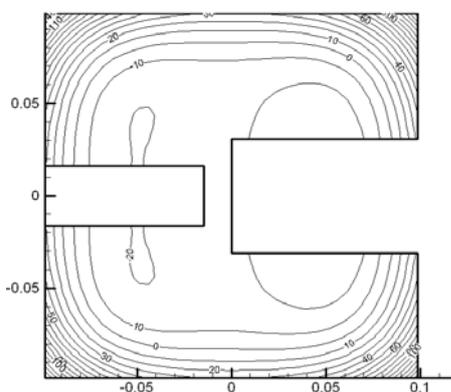


Рис. 6 - Квадратный штамп с двумя боковыми вырезами. На краях пластины жесткое закрепление, $e = 0,005$ м

Литература

1. В.М. Александров, *Инж. журнал.*, **5**, 4, 782-785 (1965).
2. Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин, *Аналитические и численные методы решения интегральных уравнений в задачах упругого воздействия тел.* Казань, Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2007, 292 с.
3. И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко, *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Москва, Наука, 1974, 456 с.

4. Л.А. Галин, *Контактные задачи теории упругости.* Москва, Гостехтеоретиздат, 1953, 264 с.
5. Л.А. Галин, *ПММ*, **40**, 6, 981-986 (1976).
6. Л.А. Галин, *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* Москва, Наука, 1980, 303 с.
7. В.И. Моссаковский, В.С. Гудрамович, В сб. *Контактная прочность пространственных конструкций*, Наук. думка, Киев, 1976, С. 3-40.
8. Г.Я. Попов, *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* Москва, Наука, 1982, 344 с.
9. И.Я. Штаерман, *Контактная задача теории упругости.* Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1949, 270 с.
10. А.И. Голованов, *Исследования по теории оболочек. Труды семинара.* Казанск. физ.-техн. ин-т КНЦ АН СССР. Казань, 1990. Т. 25. С. 66-83.
11. Ю.П. Артюхин, А.П. Грибов, *Труды XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин.* Саратовский гос. техн. ун-т. Саратов, 1997. Т. 3, С. 3-9.
12. А.П. Грибов, Н.Н. Столяров, Н.И. Куканов, *Вестник УлГТУ*, **2**, 47-54 (2000).
13. А.И. Голованов, Д.В. Бережной, *Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел.* Казань, ДАС, 2001, 301 с.
14. Ю.П. Артюхин, П.Г. Великанов, *Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек.* Казань, 2008. С. 22-24.
15. Д.В. Бережной, М.К. Сагдатуллин, А.А. Саченков, *Вестник Казанского технологического университета*, **17**, 150-158 (2012).
16. М.К. Сагдатуллин, *Вестник Казанского технологического университета*, **5**, 210-216 (2013).
17. Д.В. Бережной, М.К. Сагдатуллин, *Вестник Казанского технологического университета*, **9**, 256-262 (2013).
18. С.Н. Карасев, Ю.П. Артюхин, *Исследования по теории пластин и оболочек*, Изд-во КГУ. Казань, 1976. №12, С. 68-76.
19. С.А. Кузнецов, *Исследования по теории пластин и оболочек*, Изд-во КГУ. Казань, 1984. №17, Ч. II, С. 96-103.
20. Б.Г. Коренев, *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях.* Москва, Государственное издательство физико-математической литературы, 1960, 458 с.
21. В.А. Диткин, А.П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* Москва, Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1974, 544 с.

© Д. Л. Егоров – к.ф.-м.н., доц. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, office@kstu.ru;
 С. А. Кузнецов - к.ф.-м.н., с.н.с., доц. каф. теоретической механики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского К(П)ФУ.