УДК 519.872

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

РАСЧЁТ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе представлен алгоритм расчёта очереди открытых систем массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди в стационарном режиме функционирования.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

This paper presents an algorithm of the calculation of the queue of open queuing systems with a polycomponent input stream and a great number of restrictions on the length of the queue in the stationary mode of functioning.

В последнее время появляется всё большее количество различного рода товаров и услуг, и всё чаще возникают проблемы, связанные с организацией пунктов торговли и обслуживания населения. Для описания подобных объектов хорошо подходят модели систем массового обслуживания (СМО) с пуассоновскими потоками заявок, рассмотренные в цикле работ [1 - 8]. Однако, СМО, встречающиеся в повседневной практике, зачастую представляют собой сложные системы, имеющие во входном потоке заявки разных типов. Предположим, что рассматриваемая СМО имеет *m* обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.
- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1. В случае, когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;
- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2. В случае, когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;
- h-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_h. В случае, когда в очереди уже имеется ε_h или более требований, вновь поступившая заявка h-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

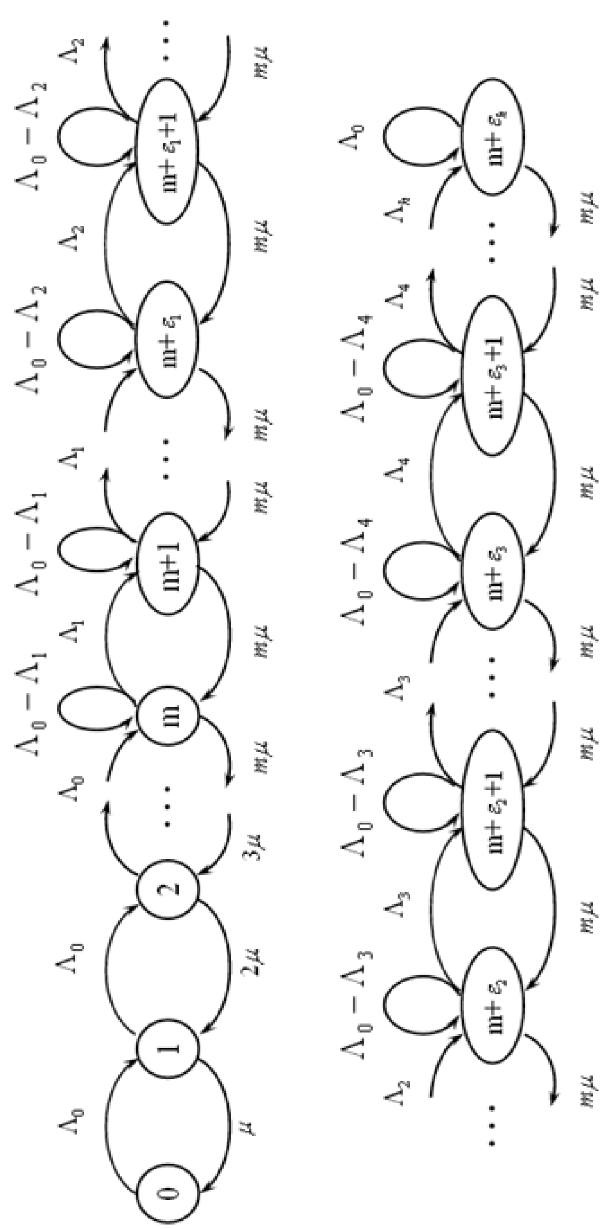

Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

Потоки заявок такого рода будем называть поликомпонентными, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным правилам, - системами дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков [9, 10]. Граф состояний и переходов такой СМО приведён на рис.1.

Принятые обозначения:

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \qquad \varepsilon_1 = E_1; \qquad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \cdots$$

$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^{j} E_i = \sum_{i=1}^{j} E_i$ - ограничения длины очереди для заявок j-го типа;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^{h} \lambda_j; \qquad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j; \qquad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^{h} \lambda_j; \cdots$$

$\Lambda_h = \lambda_h$; где λ_j - интенсивности потоков заявок j-го типа;

$$R_0 = \sum_{j=0}^{h} \rho_j; \qquad R_1 = \sum_{j=1}^{h} \rho_j; \qquad R_2 = \sum_{j=2}^{h} \rho_j; \cdots$$

$R_h = \rho_h$; $R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu}$, где ρ_j - приведенные интенсивности потоков заявок j-го типа. В этих соотношениях величины E_j имеют смысл разностей между предельными длинами очередей заявок *j*-го и *j*-1-го типов.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j, суммарные поликомпонентные потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [11]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим как μ. В этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m-го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учётом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. С учетом формул, полученных для вероятностей стационарных состояний P_i, приведенных в работе [12], найдём общую зависимость средней длины очереди от параметров входного потока заявок в стационарном режиме работы системы:

$$\overline{l} = \sum_{i=m+1}^{m+\varepsilon_h} (i-m) P_i = P_{m+1} + 2P_{m+2} + \cdots +$$

$$+\varepsilon_1 P_{m+\varepsilon_1} + (\varepsilon_1 + 1) P_{m+\varepsilon_1+1} + (\varepsilon_1 + 2) P_{m+\varepsilon_1+2} + \cdots +$$

$$+\varepsilon_2 P_{m+\varepsilon_2} + (\varepsilon_2 + 1) P_{m+\varepsilon_2+1} + \cdots + \varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h} =$$

$$= P_{m+1} + 2P_{m+2} + \cdots +$$

$$+\varepsilon_1 \left(P_{m+\varepsilon_1} + P_{m+\varepsilon_1+1} + P_{m+\varepsilon_1+2} + \cdots + P_{m+\varepsilon_2-1} \right) +$$

$$+P_{m+\varepsilon_1+1} + 2P_{m+\varepsilon_1+2} + \cdots + (E_2 - 1) P_{m+\varepsilon_2-1} +$$

$$+\varepsilon_2 \left(P_{m+\varepsilon_2} + P_{m+\varepsilon_2+1} + P_{m+\varepsilon_2+2} + \cdots + P_{m+\varepsilon_3-1} \right) +$$

$$+P_{m+\varepsilon_2+1} + 2P_{m+\varepsilon_2+2} + \cdots + (E_3 - 1) P_{m+\varepsilon_3-1} + \cdots +$$

$$+\varepsilon_{h-1} \left(P_{m+\varepsilon_{h-1}} + P_{m+\varepsilon_{h-1}+1} + P_{m+\varepsilon_{h-1}+2} + \cdots + P_{m+\varepsilon_h-1} \right) +$$

$$+P_{m+\varepsilon_{h-1}+1} + 2P_{m+\varepsilon_{h-1}+2} + \cdots + (E_h - 1) P_{m+\varepsilon_h-1} +$$

$$+\varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h} =$$

$$= \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_1}{m} \left[1 + 2\frac{R_1}{m} + \cdots + (E_1 - 1) \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1 - 2} \right] +$$

$$+\varepsilon_1 P_{Б2} + \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_2}{m} \times$$

$$\times \left[1 + 2\frac{R_2}{m} + \cdots + (E_2 - 1) \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2 - 2} \right] + \varepsilon_2 P_{Б3} +$$

$$+ \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_3}{m} \times$$

$$\times \left[1 + 2\frac{R_3}{m} + \cdots + (E_3 - 1) \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3 - 2} \right] + \cdots +$$

$$+\varepsilon_{h-1} P_{Бh} +$$

$$+ \left(\frac{R_{h-1}}{m} \right)^{E_{h-1}} \cdots \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_h}{m} \times$$

$$\times \left[1 + 2\frac{R_h}{m} + \cdots + (E_h - 1) \left(\frac{R_h}{m} \right)^{E_h - 2} \right] + \varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h} =$$

$$= \sum_{i=1}^{h-1} \varepsilon_i P_{Бi+1} + \varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h} +$$

$$+\frac{R_0^m}{m!}P_0\sum_{i=1}^{h}\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_i}{m}\times$$

$$\times\frac{1-E_i\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i-1}+\left(E_i-1\right)\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}}{\left(1-\frac{R_i}{m}\right)^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{h-1}\varepsilon_i P_{Бi+1}+\varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h}+$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\left[\frac{R_i}{m-R_i}P_{Бi}-\frac{E_i m}{m-R_i}P_{m+\varepsilon_i}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h-1}\varepsilon_i P_{Бi+1}+\varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h}+$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\left[\frac{R_i}{m-R_i}P_{Бi}-\frac{R_i E_i}{m-R_i}P_{m+\varepsilon_i}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]-\sum_{i=1}^{h}E_i P_{m+\varepsilon_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{h-1}\varepsilon_i P_{Бi+1}+\varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h}=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}P_{Бi}+$$

$$+\varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h}-\sum_{i=1}^{h}E_i P_{m+\varepsilon_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}P_{Бi}+$$

$$+\varepsilon_h P_{m+\varepsilon_h}-\sum_{i=1}^{h}\varepsilon_i P_{m+\varepsilon_i}+\sum_{i=1}^{h}\varepsilon_{i-1}P_{m+\varepsilon_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}P_{Бi}-$$

$$-\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}P_{m+\varepsilon_{i-1}}+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}P_{m+\varepsilon_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}\frac{R_0^m}{m!}P_0\times$$

$$\times\left[\frac{1-\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}}{1-\frac{R_i}{m}}\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}-\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}+\right.$$

$$\left.+\prod_{g=0}^{i}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}\frac{R_0^m}{m!}P_0\times$$

$$\times\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\left[\frac{1-\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}}{1-\frac{R_i}{m}}-1+\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]+\sum_{i=2}^{h}\varepsilon_{i-1}\frac{R_i}{m}P_{Бi}.$$

Однако, при приближении приведённой интенсивности входного потока R_i к значению, равному числу обслуживающих устройств m, полученная формула неприменима, поскольку даёт неопределённость типа $0/0$. Для раскрытия неопределённости, применяя правило Лопиталя, найдем предел

$$\lim_{R_i\to m}\frac{R_i}{m-R_i}\left[P_{Бi}-E_i P_{m+\varepsilon_i}\right]=\lim_{\frac{R_i}{m}\to 1}\frac{\frac{R_i}{m}}{1-\frac{R_i}{m}}\times$$

$$\times\left[\frac{1-\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}}{1-\frac{R_i}{m}}-E_i\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right]\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0=$$

$$=\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0\times$$

$$\times\lim_{\frac{R_i}{m}\to 1}\frac{\frac{R_i}{m}-\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i+1}\left(E_i+1\right)+E_i\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i+2}}{\left(1-\frac{R_i}{m}\right)^2}=$$

$$= \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \times$$

$$\times \lim_{\frac{R_i}{m} \to 1} \frac{1 - (E_i + 1)^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} + E_i (E_i + 2) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i + 1}}{-2 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)} =$$

$$= \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \times$$

$$\times \left[\lim_{\frac{R_i}{m} \to 1} \frac{-(E_i + 1)^2 E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i - 1}}{2} + \right.$$

$$\left. + \lim_{\frac{R_i}{m} \to 1} \frac{E_i (E_i + 2)(E_i + 1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{2} \right] =$$

$$= \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{E_i (E_i + 1)}{2} =$$

$$= \frac{E_i (E_i + 1)}{2} P_{m + \varepsilon_{i-1}}.$$

Тогда, средняя длина очереди в общем случае запишется в следующем виде:

$$\overline{l} = \sum_{i=1}^{h} \begin{cases} \frac{R_i}{m - R_i} \left[P_{Бi} - E_i P_{m + \varepsilon_i} \right], & R_i \neq m \\ \frac{E_i (E_i + 1)}{2} P_{m + \varepsilon_{i-1}}, & R_i = m \end{cases} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{h} \varepsilon_{i-1} \frac{R_i}{m} P_{Бi}.$$

Легко показать, что при стремлении параметра i к нулю, полученные зависимости], как и следовало ожидать, переходят в формулы классической теории массового обслуживания для однокомпонентных потоков заявок [7, 8].

Результаты, полученные в настоящей работе, могут быть использованы при оптимизации и проектировании объектов, работающих по принципу систем массового обслуживания.

Литература

1. *Кирпичников, А.П.* Системы обслуживания с неоднородным входным потоком требований, отказами и очередью./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2011. – №5. – С. 154 – 161.
2. *Кирпичников, А.П.* Системы массового обслуживания с отказами и неограниченной очередью./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2007. – Т. 14 - Вып. 5. – С. 893 – 896.
3. *Кирпичников, А.П.* Методика оптимальной организации систем массового обслуживания с отказами и очередью./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2008. – Т. 15 - Вып. 6. – С. 1090 – 1091.
4. *Кирпичников, А.П.* Открытые системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т.15-№1. – С. 148 – 152.
5. *Кирпичников, А.П.* О нестационарном режиме в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т.15-№6. – С. 201 – 202.
6. *Кирпичников, А.П.* Характеристики систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т.15-№8. – С. 337 – 340.
7. *Кирпичников А.П.* Прикладная теория массового обслуживания. Казань: Изд-во Казанского университета, 2008.
8. *Кирпичников А.П.* Методы прикладной теории массового обслуживания. Казань: Изд-во. Казанского университета, 2011.
9. *Титовцев, А.С.* Открытые многоканальные системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков: дис. … канд. техн. наук / А.С. Титовцев. – Казань, 2011. – 143 с.
10. *Титовцев А.* Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012.
11. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Едиториал УРСС, 2004.
12. *Кирпичников, А.П.* Вероятностные характеристики систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2013. – Т.16-№6. – С. 248 – 252.

© **А. П. Кирпичников** – д-р физ.-мат. наук, зав. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, kirpichnikov@kstu.ru; **А. С. Титовцев** – канд. тех. наук, доц. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, notna6683@mail.ru.