УДК 004.94:531.3

Р.Г. Мухарлямов

УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

Ключевые слова: система, переменная масса, управление, динамика, связи, устойчивость, стабилизация.

Предлагается метод построения уравнений динамики системы с переменной массой, обеспечивающий стабилизацию связей при численом решении. Определяются выражения соответствующих реактивных и управляющих сил.

Keywords: system, dynamics control, constraints, program, stabilization, stabiliy.

The modeling method of dynamics for mechanical system with variable mass is proposed. The problem of constraints stabilization is solved. The expressions for control forces, acting on the system in order to ensure compliance with constraints equations imposed on the system, are determined.

Введение

Моделирование динамики систем с переменными массами требует построения уравнений движений, позволяющих ограничить ошибки численного интегрирования. Существенным источником погрешностей являются отклонения от уравнений связей, вызванные приближенным заданием начальных условий и погрешностями численного решения системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих кинематику и динамику исследуемой системы. Известный метод составления уравнений динамики механической системы со связями предполагает предварительное определение множителей Лагранжа из уравнений связей и их производных по времени. При этом решение системы дифференциальных уравнений движения оказывается неустойчивым по отношению к уравнениям связей [1]. Для стабилизации связей в [2], [3] предлагается определять множители Лагранжа с учетом линейной комбинации уравнений связей и их производных, составляющей дифференциальное уравнение относительно возможных отклонений от уравнений связей. Использование [4] множества систем дифференциальных уравнений, имеющих частные интегралы [5],[6],[7], представленные уравнениями связей, для определения множителей Лагранжа позволяет создать простые алгоритмы решения задачи стабилизации связей [8], [9].

Динамика систем с переменной массой составляет самостоятельное научное направление механики. Для исследования динамики этих систем обычно привлекаются классические методы аналитической механики [10],[11], которые предъявляют жесткие требования к численным методам решения уравнений движения. В настоящей работе приводятся модификации методов построения уравнений динамики систем с переменной массой, предполагающие стабилизацию связей. Основным требованием, которому должны удовлетворять уравнения динамики, является обеспечение асимптотической устойчивости многообразия, соответствующего уравнениям связей, и сохранение устойчивости его при численном решении уравнений движений.

Уравнения динамики системы с переменными массами в прямоугольных координатах.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из k точек M_j с переменными массами m_j и радиус-векторами $r_j = x_j i + y_j j + z_j k$, где i, j, k – орты прямоугольной системы координат, $j = 1,\dots,k$. Уравнение движения j - той точки свободной механической системы соответствует основному закону динамики

$$\frac{dr_j}{dt} = v_j,\ \frac{d}{dt}\left(m_j v_j\right) = f_j, \qquad (1)$$

где, $f_j = \left(f_{jx}, f_{jy}, f_{jz}\right)$ – равнодействующая активных сил, приложенных к j-той точке. Представим уравнения (1) в матричной форме:

$$\frac{dr}{dt} = v,\ \frac{d}{dt}\left(Mv\right) = f, \qquad (2)$$

$$M = \operatorname{diag}\left(m_1,\dots,m_{3k}\right),\ m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j},$$

$$r = \left(x_1, y_1, z_1,\dots,x_k, y_k, x_k\right),\ v = \dot r,$$

$$f = \left(f_{1x}, f_{1y}, f_{1z},\dots,f_{kx}, f_{ky}, f_{kz}\right).$$

Система (2) в общем случае относительного движения частиц в точках системы приводится к виду

$$\frac{dr}{dt} = \dot r,\ M\frac{d\dot r}{dt} = f + f^p, \qquad (3)$$

где $f^p = \left(f^p_{1x}, f^p_{1y}, f^p_{1z}, \ldots, f^p_{kx}, f^p_{ky}, f^p_{kz}\right)$ - вектор реактивных сил. Реактивная сила f^p_j, действующая на j-тую точку переменной массы, определяется выражением [11]

$$f^p_j = -\sum_l m_{lj} w^r_{lj} + k_j + i_j ,$$

где индекс l соответствует всем частицам, двигающимся в j–той материальной точке с относительными ускорениями w^r_{lj}, k_j обозначает сумму кориолисовых сил инерции в j-той точке:

$$k_j = -2\sum_l \omega_j \times m_{lj} u^r_{lj} .$$

Здесь ω_j - угловая скорость вспомогательной системы координат с началом в j-той точке, u^r_{lj} - относительная скорость частицы. Вектор i_j определяет импульсную силу, соответствующую j-той точке:

$$i_j = -\sum_l \mu_{lj} \Delta u^r_{lj} . \tag{4}$$

В последнем выражении (4) суммирование проводится по всем направлениям импульсного изменения относительных скоростей частиц в j-той точке; $\mu_{lj} = \mathrm{grad} m_j \times l_0$ интенсивность перетекания частиц в направлении l_0.

Прибавим выражение $\dot r^T \dot M/2$, $\dot M = dM/dt$ к обеим частям равенства (3), записанного в виде

$$\ddot r^T M = f^T + (f^p)^T , \; \ddot r = \frac{d\dot r}{dt} ,$$

и умножив на dr, получим равенство

$$dT = f^T dr + (f^d)^T dr ,$$

где $T = \dot r^T M \dot r/2$ есть кинетическая энергия системы, для которой, начиная с рассматриваемого момента времени, полностью прекращается процесс изменения массы, $f^d = f^p + \dot M \dot r/2$ - вектор добавочных сил.

Уравнения динамики системы в обобщенных координатах

Пусть положение механической системы определяется обобщенными координатами $q^1, \ldots, q^n$. Будем считать, что массы точек зависят от обобщенных координат q^i, обобщенных скоростей v^i и времени t: $m_j = m_j(q, v, t)$, $v = dq/dt$, $q = \left(q^1, \ldots, q^n\right)$, $j = 1, \ldots, k$. При этом вектор f^p реактивных сил допускает линейную зависимость от обобщенных ускорений [11]:

$$f^p = F^p a + f^p_o ,$$

$$F^p = \left(f^p_{si}\right), \qquad i = 1, \ldots, n ,$$

$$f^p_o = \left(f^p_{so}\right),$$

$$s = 1, \ldots, 3k ,$$

$$f^p_{3j-2,i} = f^p_{jx,i}, \qquad f^p_{3j-1,i} = f^p_{jy,i},$$

$$f^p_{3j,i} = f^p_{jz,i},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n .$$

Элементарная работа добавочных сил определяется выражением

$$(f^d)^T dr = (f^d_o)^T dq + (f^d_1)^T dv + (f^d_t) dt ,$$

$$f^d_o = \left(f^d_{o1}, \ldots, f^d_{on}\right),$$

$$f^d_{oi} = (f^p_o)^T \frac{\partial r}{\partial q_i} + \frac{1}{2} v^T \frac{\partial M}{\partial q_i} v , \; i = 1, \ldots, n ,$$

$$f^d_1 = \left(f^d_{11}, \ldots, f^d_{1n}\right),$$

$$f^d_{1i} = \sum_{j=1}^{k} \left(f^p_{jx,i} \dot x_j + f^p_{jy,i} \dot y_j + f^p_{jz,i} \dot z_j\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial m_j}{\partial \dot q_i} \dot r_j^2$$

$$\dot r_j^2 = \dot x_j^2 + \dot y_j^2 + \dot z_j^2 \quad j = 1, \ldots, n ,$$

$$f^d_t = (f^p_o)^T \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{2} v^T \frac{\partial M}{\partial t} v .$$

Запишем принцип Журдена для системы с переменными массами в обобщенных координатах и скоростях:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} - f^q - f^a\right)^T \delta v = 0 . \tag{5}$$

Здесь $f^q = \left(\partial r/\partial q\right)^T f$ - вектор обобщенных активных сил, $\partial r/\partial q = \left(\partial r_s/\partial q^i\right)$, $r_{3j-2} = x_j$, $r_{3j-1} = y_j$, $r_{3j} = z_j$, $j = 1, \ldots, k$, $f^a = \left(f^a_1, \ldots, f^a_n\right)$ – вектор прибавочных сил,

$$f^a_i = (f^d)^T \frac{\partial r}{\partial q^i} + \frac{1}{2} v^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial v^i}\right) v$$

$$- \frac{1}{2} v^T \frac{\partial M}{\partial q^i} v .$$

В частном случае $M = M(t)$ вектор прибавочных сил принимает вид

$f^a = (f^d)^T \left(\partial r/\partial q\right)$. В случае, когда относительное движение частиц в материальных точках отсутствует (случай Мещерского), вектор реактивных сил оказывается равным

$$f^p = \dot{M}^{(1)}\left(u^{(1)} - v\right) - \dot{M}^{(2)}\left(u^{(2)} - v\right),$$

$$M^{(1)} = \mathrm{diag}\left(m_1^{(1)}, m_1^{(1)}, m_1^{(1)}, \dots, m_k^{(1)}, m_k^{(1)}, m_k^{(1)}\right),$$

$$M^{(2)} = \mathrm{diag}\left(m_1^{(2)}, m_1^{(2)}, m_1^{(2)}, \dots, m_k^{(2)}, m_k^{(2)}, m_k^{(2)}\right),$$

$$u^{(1)} = \left(u_{1x}^{(1)}, u_{1y}^{(1)}, u_{1z}^{(1)}, \dots, u_{kx}^{(1)}, u_{ky}^{(1)}, u_{kz}^{(1)}\right),$$

$$u^{(2)} = \left(u_{1x}^{(2)}, u_{1y}^{(2)}, u_{1z}^{(2)}, \dots, u_{kx}^{(2)}, u_{ky}^{(2)}, u_{kz}^{(2)}\right).$$

Соответствующий вектор прибавочных сил определяется выражением:

$$f^a = \left(\dot{M}^{(1)}u^{(1)} - \dot{M}^{(2)}u^{(2)}\right)^T \frac{\partial r}{\partial q}.$$

Если на систему не наложены связи, то вектор возможных перемещений δq является произвольным и из (5) следует векторное уравнение Лагранжа 2-го рода механической системы с переменными массами

$$\frac{dq}{dt} = v, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial T}{\partial q} = f^q + f^a. \qquad (6)$$

Управление программным движением

Вектор обобщенных прибавочных сил f^a зависит от законов изменения масс точек системы и скоростей отделяющихся и присоединяющихся частиц. В случае, когда закон изменения масс, относительные перемещения частиц, скорости присоединения и отделения частиц определены, механическая система с переменными массами должна управляться дополнительными силами. В этом случае прибавочные силы можно отнести к известным активным силам f^q и вектор f^a рассматривать как вектор дополнительных управляющих сил.

Обратимся к задаче определения вектора f^a из условия стабилизации связей, заданных уравнениями:

$$g(q,t) = 0, \; g'(q,v,t) = 0, \; \varphi(q,v,t) = 0, \quad (7)$$

$$g = \left(g_1, \dots, g_m\right), \qquad g' = \left(g_{m+1}, \dots, g_{2m}\right),$$

$$\varphi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_r\right)$$

$$g_{m+\mu} \equiv \sum_{i=1}^{n} g_{\mu i}\dot{q}^i + g_{\mu t},$$

$\mu = 1, \dots, m, \quad \rho = 1, \dots, r.$

Для оценки возможных отклонений от уравнений связей (7) введем параметры $\alpha_\mu, \alpha_{m+\mu}, \alpha_\rho$, которые будем рассматривать как возмущения связей, и заменим (7) уравнениями программных связей

$$g(q,t) = \alpha, \; g'(q,v,t) = \alpha', \; \varphi(q,v,t) = \beta, \quad (8)$$

Равенства (8) обеспечиваются за счет управляющих сил f^a. В случае, когда $\alpha = 0, \; \alpha' = 0, \; \beta = 0$, выполнение уравнений связей (7) обеспечивается реакциями связей. Полагая величины $\alpha_\mu, \alpha_{m+\mu}, \alpha_\rho$ малыми, определим переменные α, α', β так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям возмущений связей

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} = \alpha', \\ &\frac{d\alpha'}{dt} = K_0\alpha + K_0'\alpha' + L_0\beta + a_0^{(2)}, \\ &\frac{d\beta}{dt} = K_1\alpha + K_1'\alpha' + L_1\beta + a_1^{(2)}, \end{aligned} \qquad (9)$$

Матрицы коэффициентов при переменных $\alpha_\mu, \alpha_{m+\mu}, \alpha_\rho$ являются функциями переменных q, v, t, слагаемые $a_0^{(2)}, a_1^{(2)}$ обозначают члены, содержащие $\alpha_\mu, \alpha_{m+\mu}, \alpha_\rho$ в степени выше первой. Для стабилизации связей необходимо определить правые части системы (9) так, чтобы ее тривиальное решение $\alpha = 0, \; \alpha' = 0, \; \beta = 0$ было асимптотически устойчиво. Условия устойчивости по отношению к уравнениям связей (7) были получены в [12]. Например, система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} = \alpha', \\ &\frac{d\alpha'}{dt} = K_0\alpha + K_0'\alpha' + L_0\beta, \\ &\frac{d\beta}{dt} = K_1\alpha + K_1'\alpha' + L_1\beta \end{aligned}$$

при соответствующем выборе коэффициентов будет удовлетворять этому условию. Условия асимптотической устойчивости выполняются, когда матрицы коэффициентов являются постоянными и все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части.

Введения уравнений программных связей с асимптотически устойчивым тривиальным решением уравнений возмущений связей недостаточно для обеспечения стабилизации связей (7) при численном решении уравнений динамики. Стабилизацию связей можно обеспечить при численном интегрировании за счет дополнительных ограничений, накладываемых на правые части уравнений системы (9). Можно показать, что использование уравнений связей (8), (9) не изменяет структуры уравнений динамики (6), но приводит к изменению выражения вектора управления f^a. В этом легко убедиться, проследив процедуру составления уравнений динамики системы, на обобщенные координаты и скорости которой наложены условия (8), (9). Так из условий (8) следует, что вектор δv виртуальных скоростей системы должен удовлетворять условию:

$$G\delta v = \delta\gamma, \tag{10}$$

$$G = \begin{pmatrix} g'_v \\ \varphi_v \end{pmatrix}, \qquad g'_v = \left(\frac{\partial g'_\mu}{\partial v^i}\right), \qquad \varphi_v = \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial v^i}\right)$$

Равенство (10) представляет собой систему линейных уравнений относительно составляющих вектора δv. Матрица G коэффициентов этой системы является прямоугольной. Общее решение линейного алгебраического уравнения (10) с прямоугольной матрицей коэффициентов G определяется выражением [6]

$$\delta v = \delta s\left[GC\right] + \left(G\right)^{+}\delta\gamma,$$

где δs – произвольная малая скалярная величина, $\left[GC\right]$ есть векторное произведение векторов-строк матрицы G и произвольной матрицы $C = \left(c_{\eta i}\right)$, $\eta = m + r + 1, \ldots, n - 1$, $i = 1, \ldots, n$,

$$G^{+} = G^T\left(GG^T\right)^{-1}.$$

Подстановка полученного выражения (11) виртуальных скоростей системы в равенство (5) позволяет получить соответствующие уравнения динамики системы. Программные связи (8) являются идеальными, если при любой матрице С выполняется условие $\left(f^a\right)^T\left[GC\right] = 0$. Нетрудно видеть, что вектор f^a можно рассматривать как реакцию $f^a = G^T\lambda$ идеальных связей, определяемых в классической механике. Действительно, из условия идеальности связей $\left(f^a\right)^T\left[GC\right] = 0$ и равенства $G\left[GC\right] = 0$ следует справедливость равенства $\left(f^a\right)^T\delta v = 0$. В итоге получаем уравнения динамики механической системы переменной массы, на которую наложены идеальные связи:

$$\frac{dq}{dt} = v, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = f^q + G^T\lambda. \tag{12}$$

Уравнения (8), (9), (12) составляют замкнутую систему, из которой при соответствующих начальных условиях

$$q\left(t_o\right) = q_0, \; v\left(t_o\right) = v_0,$$

$$\alpha(t_o) = g(q_0, t_o),$$

$$\alpha'(t_o) = g'(q_0, v_0, t_o),$$

$$\beta\left(t_0\right) = \varphi\left(q_0, v_0, t_0\right)$$

может быть определен закон изменения переменных $q, v, \alpha, \alpha', \beta, \lambda$. Вектор λ можно рассматривать как вектор управления программным движением.

Рассмотрим случай, когда матрица M масс системы не зависит от вектора обобщеннных скоростей v: $M = M\left(q, t\right)$. В этом случае выражения прибавочных сил упрощаются:

$$f_i^a = (f^d)^T\frac{\partial r}{\partial q^i} - \frac{1}{2}v^T\frac{\partial M}{\partial q^i}v,$$

и система (12) записывается в виде:

$$\frac{dq}{dt} = v, \; \frac{dv}{dt} = w\left(q, v, t\right) + M^{-1}G^T\lambda, \tag{13}$$

$$w = M^{-1}\left(\frac{1}{2}v^T M_q(v)v - \dot{M}v + f^q\right),$$

$$M_q = \left(\frac{\partial M}{\partial q^i}\right).$$

Из равенств (8),(9),(13) следуют уравнения для определения вектора λ:

$$\begin{aligned} g'_v M^{-1}G^T\lambda &= K_0\alpha + K'_0\alpha' + L_0\beta + a_0^{(2)} - g'_q v - g'_v w - g'_t \\ \varphi_v M^{-1}G^T\lambda &= K_1\alpha + K'_1\alpha' + L_1\beta + a_1^{(2)} - \varphi_q v - \varphi_v w - \varphi_t. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставив решение системы (14)

$$\lambda = S^{-1}\left(K\alpha + K'\alpha' + L\beta + a^{(2)}\right) - S^{-1}s,$$

$$K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}, \qquad K' = \begin{pmatrix} K'_0 \\ K'_1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \end{pmatrix},$$

$$S = GM^{-1}G^T, \qquad s = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g'}{\partial q}v + \dfrac{\partial g'}{\partial v}w + \dfrac{\partial g'}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial q}v + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}w + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \end{pmatrix},$$

в правые части уравнений (13), получим систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= M^{-1}G^T S^{-1}\left(K\alpha + K'\alpha' + L\beta + a^{(2)}\right) + w - M^{-1}G^T S^{-1}s, \end{aligned} \tag{15}$$

для которой уравнения связей (7) являются частными интегралами.

Стабилизация связей

Для определения условий устойчивости и стабилизации связей при численном решении представим систему уравнений (8),(9),(15) в новых обозначениях:

$$y-\psi(x,t)=0,$$

$$\frac{dx}{dt}=p(x,t)+P(x,t)y, \qquad (16)$$

$$\frac{dy}{dt}=L(x,t)y+a^{(2)}, \qquad (17)$$

$$y=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha'\\ \beta\end{pmatrix},\ \psi=\begin{pmatrix}g\\ g'\\ j\end{pmatrix},\ a^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ a_0^{(2))}\\ a_1^{(2))}\end{pmatrix},$$

$$x=\begin{pmatrix}q\\ v\end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix}v\\ w-M^{-1}G^TS^{-1}\left(a^{(2)}-s\right)\end{pmatrix},$$

$$P=M^{-1}G^TS^{-1}L,\ L=\begin{pmatrix}0 & I & 0\\ K_0 & K_0' & L_0\\ K_1 & K_1' & L_1\end{pmatrix}.$$

В силу построения правая часть уравнения (16) удовлетворяет условиям:

$$\psi_x p+\psi_t=0,\qquad \psi_x Py=Ly+a^{(2)},$$

и равенство $\psi(x,t)=0$ представляет совокупность частных и нтегралов уравнения

$$\frac{dx}{dt}=p(x,t)+P(x,t)\psi(x,t). \qquad (18)$$

Устойчивость по отношению к уравнениям связей может быть исследована как задача устойчивости по переменным y системы уравнений (16),(17). Условия устойчивости определяются по свойствам функции Ляпунова $V=V(y,t)$ и ее производной $\dot V=V_y\left(L(x,t)y+a^{(2)}\right)+V_t$. Для стабилизации связей (7) при численном решении уравнения (18) необходимо наложить дополнительные условия на матрицу L коэффицентов линейной части
Уравнения (17). Очевидно, эти условия определяются выбором численного метода решения. Легко показать, что стабилизация связей возможна даже при использовании простейших разностных схем решения уравнения (18).

Пусть известны начальные значения t_0, x^0, удовлетворяющие условию $\left\|\psi^0\right\|\le\varepsilon$, $\psi^k=\psi\left(x^k,t_k\right)$ и для решения уравнения (18) используется разностное уравнение

$$x^{k+1}=x^k+\tau\left(p^k+P^k\psi^k\right),\qquad x^k=x(t_k),$$

$$t_{k+1}=t_k+\tau, \qquad (19)$$

$$k=0,1,2,\ldots,K.$$

Тогда существуют такие постоянные $\alpha,\tau_1,\varepsilon$ и матрица $L(x,t)$, что, если

$$\left\|E+\tau L(x,t)\right\|\le\alpha<1,$$

$$\frac{\tau_1^2}{2}\left\|\psi^{(2)}\right\|\le(1-\alpha)\varepsilon,$$

$$\psi^{(2)}=v^T\psi_{x^Tx}v+2\psi_{xt}v+\psi_{tt},$$

то решение разностного уравнения (19) будет удовлетворять условию $\left\|\psi^k\right\|\le\varepsilon$ при всех $k=1,2,\ldots,K$. Действительно, пусть неравенство $\left\|\psi^k\right\|\le\varepsilon$ верно при некотором значении k и представим вектор ψ^{k+1} разложением в ряд

$$\psi^{k+1}=\psi^k+\psi_x^k\Delta x^k+\psi_t^k\tau+\frac{\tau^2}{2}\tilde\psi^{(k2)}, \qquad (20)$$

$$\Delta x^k=\tau\left(p^k+P^k\psi^k\right),$$

$\tau^2\tilde\psi^{(k2)}/2$ - остаточный член. Оценивая правую часть выражения (20), получаем:

$$\left\|\psi^{k+1}\right\|\le\left\|E+\tau L^k\right\|\left\|\psi^k\right\|+\frac{1}{2}\tau^2\left\|\tilde\psi^{(k2)}\right\|$$

$$\le\alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon=\varepsilon.$$

Условия стабилизации могут быть получены аналогичными рассуждениями и для разностных схем более высокого порядка [13].

Пример. Рассмотрим задачу движения точки переменной массы в вертикальной плоскости *Oyz* по заданному закону. Уравнения связей записываются в виде

$$g_1(x,y,z,t)\equiv x=0, \qquad (21)$$

$$g_2(x,y,z,t)\equiv y-\eta(t)=0, \qquad (22)$$

$$g_3(x,y,z,t)\equiv z-\zeta(t)=0. \qquad (23)$$

Реакция связей N и прибавочные силы P определяются в соответствии с заданием способа реализации связей (21)-(23). Для определенности будем считать, что связь (21) осуществляется внешними воздействиями N, а связи (22),(23) обеспечиваются за счет прибавочных сил P. За обобщенные координаты примем $q^1=x$, $q^2=y$, $q^3=z$. Массу точки примем равной сумме $m=m_0+m_2(t)$, где m_0 – постоянная масса, $m_2(t)$ – масса отделяющихся частиц, которая зависит только от времени t, присоединения частиц нет: $m_1\equiv 0$. Тогда реактивная сила

$$R=\dot m(u-v) \qquad (24)$$

определяется изменением массы $\dot{m}$ и скоростью отделяющихся частиц u. Будем считать, что на точку действуют сила тяжести $mg = (0, 0, -mg)$ и сила сопротивления среды F_c:

$$F = mg + F_c.$$

Относительно силы F_c будем полагать, что она направлена в сторону, противоположную скорости точки, а величина ее зависит от высоты z и величины v скорости v точки:

$$F_c = -mf_c(z, v)\tau, \; v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

$$v_1 = \dot{x}, \; v_2 = \dot{y}, \; v_3 = \dot{z}.$$

$$\tau = v^{-1}v, \; v = (v_1, v_2, v_3),$$

Кинетическая энергия $T = mv^2/2$ и обобщенные силы f_1, f_2, f_3 определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right), \; f_1 = 0, \; f_2 = -\frac{mf_c\left(q^3, v\right)v_2}{v},$$

Положим $G = P + N$, $P = (0, P_2, P_3)$, $N = (N_1, 0, 0)$. Из условия идеальности связей (21)-(23) следуют выражения для реакции N_1 связи (21) и прибавочных сил P_2, P_3:

$$N_1 = \lambda_1, \; P_2 = \lambda_2, \; P_3 = \lambda_3.$$

Структура прибавочных сил определяется из выражения (24):

$$P_2 = \dot{m}(\beta_2 - 1)v_2, \; P_3 = \dot{m}(\beta_3 - 1)v_3,$$

$$\beta_2 = \frac{u_2}{v_2}, \; \beta_3 = \frac{u_3}{v_3}.$$

Из уравнений кинематики $\dot{q}^1 = v_1$, $\dot{q}^2 = v_2$, $\dot{q}^3 = v_3$, динамики

$$m\dot{v}_1 = \lambda_1, \; m\dot{v}_2 = -\frac{mf_c\left(q^3, v\right)v_2}{v} + \lambda_2,$$

$$m\dot{v}_3 = -mg - \frac{mf_c\left(q^3, v\right)v_3}{v} + \lambda_3$$

и уравнений программных связей

$$q^1 = \alpha_1, \; q^2 - \eta(t) = \alpha_2, \; q^3 - \zeta(t) = \alpha_3,$$

$$v_1 = \alpha_4, \; v_2 - \dot{\eta}(t) = \alpha_5, v_3 - \dot{\zeta}(t) = \alpha_6$$

определяются $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Положим:

$$\dot{\alpha} = A\alpha, \; \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_6),$$

$$A = \begin{pmatrix} O_{33} & I_3 \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}, \qquad O_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{10} = (a_{ij}), \; A_{11} = (a_{i,3+j}), \; i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда из (26)-(28) определяются

$$f_3 = -mg - \frac{mf_c\left(q^3, v\right)v_2}{v}.$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = m\sum\limits_{j=1}^{6} a_{1j}\alpha_j, \\ \lambda_2 = m\left(\ddot{\eta}(t) + \dfrac{f_c(q_3, v)v_2}{v} + \sum\limits_{j=1}^{6} a_{2j}\alpha_j\right), \\ \lambda_3 = m\left(\ddot{\zeta}(t) + \dfrac{f_c(q_3, v)v_2}{v} + \sum\limits_{j=1}^{6} a_{3j}\alpha_j\right). \end{cases}$$

Подставляя в (29) значения α_j из (27) и учитывая равенства (28), можно получить явные выражения для N_1, P_2, P_3. Так, полагая

$$a_{1j} = 0, \; j = 2, 3, 5, 6, \; a_{2j} = 0, \; j = 1, 3, 4, 6,$$

$$a_{3j} = 0, \; j = 1, 2, 4, 5,$$

получим выражения:

(25)

$$N_1 = m\left(a_{11}x + a_{14}\dot{x}\right),$$

$$P_2 = m\left(\ddot{\eta}(t) + \frac{f_c(z, v)\dot{y}}{v} + a_{22}(y - \eta(t)) + a_{25}(\dot{y} - \dot{\eta}(t))\right), \qquad (30)$$

$$P_3 = m\left(\ddot{\zeta}(t) + \frac{f_c(z, v)\dot{z}}{v} + a_{33}(z - \zeta(t)) + a_{36}(\dot{z} - \dot{\zeta}(t))\right).$$

Если принять $a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, 3$, то легко получить из (25), (30) выражения

$$\beta_1 = 1 + \frac{m(t)}{\dot{m}(t)}\left(\frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)} + \frac{f_c(\eta(t), v(t))}{v(t)}\right), \qquad (26)$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{m(t)}{\dot{m}(t)}\left(\frac{\ddot{\zeta}(t)}{\dot{\zeta}(t)} + \frac{f_c(\zeta(t), v(t))}{v(t)}\right),$$

$$v^2(t) = \dot{\eta}^2(t) + \dot{\zeta}^2(t),$$

что совпадает с результатом, полученным в [7]. (27)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 13-08-00535.

Литература

1. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 12. С. 2048-2056.
2. *Baumgarte J,* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1 (1972), 1-16.
3. *Gonzales F., Kovecses J.* Use of Penalty Formulation in Dynamic Simulation and Analysis of Redundantly Constrained Multibody Systems // Multibody System Dynamics. – 2012.
4. *Мухарлямов Р.Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. 2006. Том 70. № 2. С 236-249.
5. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. Т. 21. № 6. 1952. С. 659-670.
6. *Мухарлямов Р.Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 10. С. 1825-1834.
7. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики. М. Наука. 1981. 143 с.
8. *Р.Г. Мухарлямов, О.В. Матухина.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация // Вестник КГТУ, 2012, т. 15, в. 12. - С. 220-224.
9. *Матухина О.В.* Компьютерные технологии в управлении системой с программными связями // Вестник КГТУ, 2013, т. 16, № 2. – С. 199-202.
10. *Сапа В.А.* К вопросу об основах аналитической механики систем переменной массы // Уч.зап. КГУ, т. XXX, вып. 5, 1957.
11. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика с систем с переменными массами. 1969. Изд. ЛГУ. 240 с.
12. *Мухарлямов Р.Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. 1969. Т.5. N 4. С. 688-699.
13. *Мухарлямов Р.Г.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 10. N 5. С. 900-908.

© **Р.Г. Мухарлямов** – д.ф.-м.н., профессор кафедры математики ФГБОУ ВПО «КНИТУ», rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru.