

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Ключевые слова: динамика, программные связи, устойчивость, численное решение, стабилизация, уравнение, построение, система.

Рассматривается построение и решение уравнений динамики управляемой электромеханической системы с голономными и неголономными программными связями. Предлагаемая модификация уравнений с неопределенными множителями дает возможность обеспечить асимптотическую устойчивость интегрального многообразия, соответствие уравнениям связей и устойчивость при численном решении.

Keywords: dynamics, program communication, stability, numerical solution, stabilization, equation, construction, system.

Construction and the solution of the equations of dynamics of controlled electromechanical system with holonomic and nonholonomic program constraints is considered. The modification of equations with undefined multipliers gives the possibility to obtain the asymptotic stability of integral manifold, the accordance constraint equations and stability in numerical solution.

Современные методы моделирования динамики сложных систем предполагают обеспечение выполнения требуемых свойств функционирования на этапе составления уравнений динамики. Динамические аналогии позволяют использовать уравнения и методы классической механики для составления уравнений динамики управляемых систем, содержащих элементы различной физической природы, и исследования ее кинематических и динамических свойств. Кроме того, необходимо учитывать стабилизацию связей, накладываемых на заданную систему. Решение задачи управления динамикой сложной физической системы с учетом стабилизации связей может быть получено с необходимой точностью при использовании простых численных методов.

Среди разнообразных явлений различной физической природы нередко можно встретить похожие явления, обнаруживающие одинаковые признаки и закономерности. В таких случаях говорят о физических аналогиях, или аналогичных системах. Физические аналогии, существующие между электрическими, механическими, акустическими и другими системами, давно с успехом используются при исследованиях и расчетах. Методы, основанные на применении аналогий, в ряде случаев оказываются весьма плодотворными при решении задач. Они позволяют сводить решения некоторых задач к решениям других уже известных задач, зачастую из другого раздела физики.

В работах [1, 2] предлагается обобщение и унификация множества переменных, которые описывают динамику физической системы. Некоторую классификацию возможно также провести среди величин, характеризующих динамическое поведение систем различной физической природы. Кроме того, определяется унифицированное множество переменных, которое включает следующие известные величины: усилие, расход импульс и перемещение. Использование динамических аналогий позволяет строить уравнения динамики для систем различной физической природы.

Данная работа иллюстрирует применение указанных методов для исследования динамики электромеханической системы. На примере электромеханической системы рассматриваются методы применения уравнений аналитической механики не только к механическим, но и к электрическим и электромеханическим системам.

Электромеханическая система из [3] является системой, предназначенной для преобразования электрических колебаний в соответствующие механические колебания. Работа системы управляется блоком питания, обеспечивающим подачу электрической мощности двигателю постоянного тока. Переменный ток через выпрямитель подается на двигатель постоянного тока, который, в свою очередь, управляет работой кривошипно-шатунного механизма, расположенного в однородном поле силы тяжести.

Требуется построить уравнения динамики данной электромеханической системы в форме уравнений Лагранжа, обеспечивающие устойчивость многообразия, определенного уравнениями связей, а также найти решение этих уравнений.

При построении уравнений динамики для электромеханической системы необходимо учесть определенные постоянные: m – масса ползуна, b – коэффициент трения, l – длина шатуна, r – радиус кривошипа, J – момент инерции кривошипа, K – постоянная вращающего момента двигателя, L – индуктивность катушки, R – сопротивление резистора, C – емкость конденсатора.

Уравнения динамики в форме Лагранжа составляются методом, описанном в [4, 5]. При построении уравнений динамики учитываются кинематические и динамические характеристики системы, а также уравнения связей.

В качестве переменных состояния [4] принимается универсальная пара переменных $\{q, f\}$, где q – обобщенные перемещения, f – обобщенные расходы.

Для рассматриваемой системы вводятся следующие обозначения постоянных величин и переменных состояния: q_1, q_2 – заряды, проходящие

через диоды за время t ; q_3 – заряд конденсатора; q_4 – заряд, проходящий через резистор; q_5 – заряд, проходящий через катушку индуктивности; q_6 – угловое перемещение кривошипа; q_7 – поступательное перемещение ползуна; f_1, f_2 – силы токов, протекающих через диоды; f_3 – сила тока, проходящего через конденсатор; f_4 – сила тока, проходящего через резистор; f_5 – сила тока, проходящего через катушку индуктивности; f_6 – угловая скорость кривошипа; f_7 – скорость ползуна.

Для построения уравнений динамики в форме Лагранжа составляются выражения для кинетической энергии T^* , потенциальной энергии V и диссипативной функции D электромеханической системы через переменные состояния $\{q, f\} = (q_1, \dots, q_7, f_1, \dots, f_7)$.

Кинетическая энергия электромеханической системы определяется выражением вида

$$T^* = \frac{1}{2} L f_5^2 + \frac{1}{2} J f_6^2 + \frac{1}{2} m f_7^2. \quad (1)$$

Единственным потенциальным параметром системы является емкость C электрического конденсатора. С учетом этого потенциальная энергия системы запишется в виде

$$V = \frac{q_3^2}{2C}. \quad (2)$$

Кроме того, имеются два диссипативных параметра – сопротивление R электрического резистора и коэффициент трения b ползуна. Следовательно, диссипативная функция системы будет иметь вид:

$$D = \frac{1}{2} R f_4^2 + \frac{1}{2} b f_7^2. \quad (3)$$

На данную электромеханическую систему накладываются голономные и неголономные связи общего вида

$$\Phi(q, t) = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(f, q, t) = 0.$$

Геометрия кривошипно-шатунного механизма требует выполнения условия

$$(q_7 - r \cos q_6)^2 + (r \sin q_6)^2 = l^2.$$

Первый закон Кирхгофа требует, чтобы было справедливо

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4, \quad (4)$$

$$f_4 = f_5. \quad (5)$$

Интегрируя выражение (4), получим выражения двух голономных связей и одной дифференциальной связи:

$$\phi_1 = (q_7 - r \cos q_6)^2 + (r \sin q_6)^2 - l^2 = 0, \quad (6)$$

$$\phi_2 = q_1 + q_2 - q_3 - q_4 - q_5 = 0, \quad (7)$$

$$\psi_1 = f_4 - f_5 = 0. \quad (8)$$

Диоды накладывают ограничения на токи и напряжения в системе [3]. Учитывая, что e_1, e_2 представляют собой напряжения на $p-n$ переходе в полупроводниковых диодах, а f_1, f_2 – силы токов

этих диодов, получаются два ограничения усилия, определенных в виде

$$\gamma_1 \equiv f_1 - i_s (e^{\alpha e_1} - 1) = 0, \quad (9)$$

$$\gamma_2 \equiv f_2 - i_s (e^{\alpha e_2} - 1) = 0, \quad (10)$$

где i_s – сила тока насыщения, α – известная постоянная.

Для двигателя постоянного тока также могут быть записаны соотношения, накладывающие ограничения на усилия. Обозначив переменные e_3 – обратный ток, e_4 – вращающий момент, f_5 – сила тока и f_6 – скорость двигателя, ограничения усилий можно представить в виде:

$$\gamma_3 \equiv e_3 - K f_6 = 0, \quad (11)$$

$$\gamma_4 \equiv e_4 - K f_5 = 0, \quad (12)$$

где K – это постоянная вращающего момента двигателя.

Выражение для элементарной работы усилий источников тока и четырех невязных усилий (e_1, \dots, e_4) запишется в виде:

$$\delta W^{(n)} = (u_1 - e_1) \delta q_1 + (u_2 - e_2) \delta q_2 - e_3 \delta q_5 + e_4 \delta q_6. \quad (13)$$

Коэффициентами при δq_i в этом выражении элементарной работы являются составляющие вектора обобщенных сил Q .

Дифференциально-алгебраические уравнения в форме Лагранжа имеют вид [4, 5, 6]:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f, \\ M\dot{f} + \Phi_q^T \kappa + \Psi_f^T \mu &= S, \\ \Phi &= 0, \quad \Psi = 0, \\ \Gamma &= 0, \quad \dot{s} - \Lambda = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь M – матрица инерционных коэффициентов:

$$M(q, t) = \frac{\partial T^*}{\partial f^2}; \quad \Phi$$
 – вектор голономных связей (6),

(7); Ψ – неголономная связь (8). Кроме того, вектору Φ_q в системе (14) соответствует якобиан $\frac{\partial \Phi}{\partial q}$; а

вектору Ψ_f – якобиан $\frac{\partial \Psi}{\partial f}$. Вектор ограничений

усилий содержит ограничения (9)–(12). Вектор S , стоящий в правой части уравнения (14), с учетом (13), (1), (2), (3) определяется

$$S(f, q, t) = Q - \frac{d}{dq} \frac{\partial T^*}{\partial f} f - \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial f} + \frac{\partial T^*}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial D}{\partial f}.$$

В итоге, уравнения динамики электромеханической системы (14) примут вид, представленный в следующей системе (15):

$$\dot{q} = f,$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ L \\ J \\ m \end{bmatrix} \dot{f} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2rq_7 \sin q_6 & 0 \\ 2(q_7 - r \cos q_6) & 0 \end{bmatrix} \kappa + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} u_1(t) - e_1 \\ u_2(t) - e_2 \\ -\frac{q_3}{C} \\ -Rf_4 \\ -e_3 \\ e_4 \\ -bf_7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_7^2 - 2rq_7 \cos q_6 + r^2 - l^2 \\ q_1 + q_2 - q_3 - q_4 + q_{3_0} \\ f_4 - f_5 \\ f_1 - i_s(e^{\alpha e_1} - 1) \\ f_2 - i_s(e^{\alpha e_2} - 1) \\ e_3 - Kf_6 \\ e_4 - Kf_5 \end{bmatrix} = 0, \quad (15)$$

где $q = (q_1, \dots, q_7)$, $f = (f_1, \dots, f_2)$, $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ и $\mu = (\mu_1)$ – векторы множителей Лагранжа.

Метод решения системы (14) описан в [5]. Но в этом случае необходимо выполнение условия, что матрица M^{-1} , обратная к матрице M , существует. При рассмотрении данной электромеханической системы была получена матрица инерционных коэффициентов (15). Для нее не существует обратной матрицы M^{-1} .

В системе (15) выполняются элементарные преобразования. Кроме того, для стабилизации связей вместо заданных уравнений связей (6), (7), (8) вводятся уравнения программных связей [7]. Система (15) с учетом этих преобразований принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = f_i, & (i=1, \dots, 7), \\ \kappa_j = u_j(t) - \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{f_j}{i_s} + 1\right), & (j=1, 2), \\ \mu = \frac{q_3}{C} - Rf_4, & L\dot{f}_5 - \mu = -Kf_6, \\ J\dot{f}_6 + 2rq_7 \sin q_6 \kappa_1 = Kf_5, \\ m\dot{f}_7 + 2(q_7 - r \cos q_6) \kappa_1 = -bf_7, \\ 2\phi_1 = q_7^2 - 2rq_7 \cos q_6 + r^2 - l^2 = y_1, \\ \phi_2 = q_1 + q_2 - q_3 - q_4 - q_{3_0} = y_2, \\ \psi_1 = f_4 - f_5 = z. \end{cases} \quad (16)$$

Правые части y_1 , y_2 , z трех равенств определяются как решения уравнений возмущений связей.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2, \\ \frac{dz}{dt} = P_{11}y_1 + P_{12}\dot{y}_1 + P_{13}y_2 + P_{14}\dot{y}_2 + P_{15}z, \\ \frac{dz}{dt} = P_{21}y_1 + P_{22}\dot{y}_1 + P_{23}y_2 + P_{24}\dot{y}_2 + P_{25}z, \\ \frac{dz}{dt} = P_{31}y_1 + P_{32}\dot{y}_1 + P_{33}y_2 + P_{34}\dot{y}_2 + P_{35}z \end{cases} \quad (17)$$

где P_{ij} ($i=1, \dots, 3, j=1, \dots, 5$) могут зависеть от переменных состояния $q(t) = q_1(t), \dots, q_7(t)$. В частности могут быть постоянными величинами.

Необходимо решить систему (16) относительно \dot{q} и \dot{f} . Переменными состояниями здесь являются $q(t) = q_1(t), \dots, q_7(t)$ и $f(t) = f_1(t), \dots, f_7(t)$. Следовательно, вектор решения $\bar{x}(t) = \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_7(t), \dot{f}_1(t), \dots, \dot{f}_7(t)$ будет иметь вид:

$$\bar{x}(t) = (t, q_1(t), \dots, q_7(t), f_1(t), \dots, f_7(t)).$$

В результате исследования уравнений кинематики и динамики электромеханической системы, система уравнений (16) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = f_i = i_s(e^{\alpha(u_i(t) - q_{3_0}/C)} - 1), & (i=1, 2), \\ \dot{q}_3 = f_3 = f_1 + f_2 - f_5, \\ \dot{q}_j = f_j, & (j=5, 6, 7), \\ \dot{f}_5 = \frac{1}{L} \left(\frac{q_3}{C} - Rf_5 - Kf_6 \right), \\ \dot{f}_6 = \frac{1}{J} (Kf_5 - 2rq_7 \sin q_6 \cdot \kappa_1(q_6, q_7, f_5, f_6, f_7)), \\ \dot{f}_7 = \frac{1}{m} (2(r \cos q_6 - q_7) \cdot \kappa_1(q_6, q_7, f_5, f_6, f_7) - bf_7). \end{cases} \quad (18)$$

Для решения системы уравнений (18) задается ряд постоянных параметров, которые соответствуют стандартной работе электромеханической системы [4]: $R = 100$ Ом; $L = 10$ Гц; $C = 50 \cdot 10^{-6}$ Ф; $i_s = 10^{-9}$ А; $\alpha = 39$ В $^{-1}$; $J = 0,16 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с 2 ; $b = 4 \cdot 10^{-7}$ (Н·с)/м; $K = 0,1$ (Н·м)/А; $m = 0,5$ кг; $r = 0,0141$ м; $l = 0,0224$ м; $e_1^s(t) = u_1(t) = \sin t \cdot e^{-t/10}$ В; $e_2^s(t) = u_2(t) = -\sin t \cdot e^{-t/10}$ В.

Для применения численных методов к решению системы дифференциальных уравнений (18) необходимо определить множество начальных условий. Для данной системы множество начальных условий определяется нулевыми начальными значениями всех переменных, кроме $q_{6_0} = \pi/4$ и $q_{7_0} = 0,03$ м. Такие значения выбираются с условием, что система находится в состоянии покоя в начальный момент времени. Откуда следует, что только голономная связь ϕ_1 требует ненулевых начальных условий. Значения для q_{6_0} и q_{7_0} подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие $\phi_1 = 0$.

Преобразования и решение системы дифференциальных уравнений (18) проводилось с помощью интегрированной системы компьютерной символьной математики MAPLE, которая позволяет автоматизировать математические вычисления – как численные, так и символьные. Изначально с помощью системы MAPLE были выполнены все преобразования и получена система дифференциальных уравнений (18).

Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений и построение фазовых портретов были осуществлены методом Эйлера с шагом $h = 0,001$.

Далее были проведены численные эксперименты, связанные с подбором коэффициентов, входящих в систему (17). Суждение об устойчивости делается по свойствам функции Ляпунова [7, 8].

Проведение численных экспериментов в системе MAPLE дало следующие **результаты**.

На рис.1 представлен график голономной связи (6) $q_7(q_6)$:

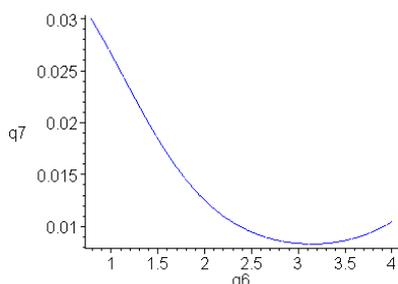


Рис. 1.

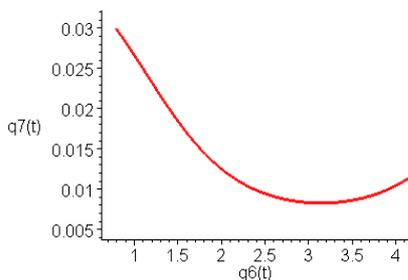


Рис. 2.

В ходе численных экспериментов были подобраны определенные значения элементов P_{ij} ($i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 5$). В итоге были получены следующие графические зависимости. При решении уравнений в системе MAPLE график зависимости $q_7(q_6)$ принял вид, представленный на рис.2.

Кроме того, были получены графические представления искомых функций системы (18) $q_6(t)$, $f_6(t)$, $q_7(t)$, $f_7(t)$, а также фазовые портреты $f_5(q_5)$, $f_6(q_6)$ (рис. 3), $f_7(q_7)$ (рис. 4).

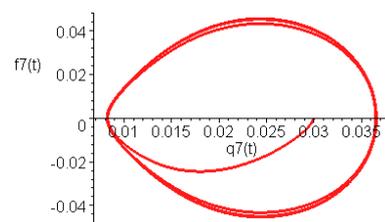


Рис. 3.

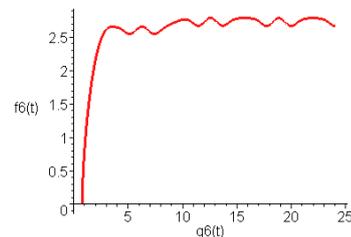


Рис. 4.

Графическая иллюстрация решений дифференциальных уравнений динамики данной электромеханической системы позволяет сделать вывод о том, что выходные графические зависимости и фазовые портреты заданных физических величин являются вполне характерными для такого рода задач. Кроме того, сравнение графиков, представленных на рис. 1 и рис. 2 говорит о том, что для величин q_6 , q_7 решение является устойчивым. Об этом можно судить, так как результат вычислений, представленный на рис. 2 свидетельствует о совпадении с достаточной точностью траектории $q_7(q_6)$ с кривой, соответствующей уравнению связи (рис. 1).

Как показали численные эксперименты, изменение начальных условий и дальнейший подбор постоянных коэффициентов дают вполне устойчивую картину для кривых, построенных в других численных пределах.

Литература

1. А.С. Галиуллин, Аналитическая динамика. Высш. шк., Москва, 1989, 264 с.
2. Г. Ольсон, Динамические аналогии. Пер. с англ. Б.Л. Коробочкина. Под ред. М.А. Айзермана, Гос. Изд. иностр. лит-ры, Москва, 1947.
3. О.В. Шемелова, Инновации и высокие технологии XXI века: материалы Всероссийской научно-практической конференции (Нижекамск, 28–30 апреля, 2009), Нижекамск, 2009, Т.1, С. 219–223.
4. Richard A. Layton, Principles of analytical system dynamics. Springer-Verlag New-York, Inc., 1998, 156 p.
5. О.В. Шемелова, Вестник РУДН, сер. Прикладн. матем. и информ., 1, 63–71 (2003).
6. О.В. Шемелова, Интегративный характер современного математического образования: материалы Всерос. науч.-практ. конф. (Самара, 24–27 сентября, 2007), Самара, 2007, Ч.1, С. 82–87.
7. Р.Г. Мухарлямов, О.В. Матухина, Вестник Казанского технологического университета, 12, С. 220–225 (2012).
8. О.В. Матухина, Вестник Казанского технологического университета, 11, С. 272–274, (2012).