

Л.Е. Шувалова, Л.А. Апаичева

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: нелинейные сингулярные интегральные уравнения, метод механических квадратур.

Исследованы условия существования и единственности решения одного класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрен метод решения – метод механических квадратур. Приведены различные вычислительные схемы. Дано обоснование одной из схем.

Keywords: nonlinear singular integral equations, the method of mechanical quadratures.

Conditions of existence and uniqueness of a solution for one class of nonlinear singular integral equations were investigated. The method of mechanical quadratures was considered. Various computing schemes were adduced and one of them was substantiated.

Введение

Значительное число теоретических и прикладных задач приводит к необходимости решения различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений (НСИУ). Многочисленные примеры прикладных задач аэродинамики, теории упругости, электродинамики и дифракции волн приводятся в монографиях Б.Г. Габдулхаева [1], И.К.Лифанова [2, 9]. Из теории таких уравнений следует, что найти точное решение удастся лишь в отдельных случаях. Поэтому разработка и теоретическое обоснование аппроксимативных методов их решения является актуальной задачей. Применительно к различным типам НСИУ имеется большое количество теорем о разрешимости и свойствах решений, которые трудно объединить в единую теорию подобную теории линейных уравнений (см., напр., [3]). В настоящее время теория НСИУ представляет собой интенсивно развивающуюся область математики, интерес к которой, как и число работ, посвященных этой теме, постоянно растет. В данной статье, являющейся продолжением работы [4], исследуются вычислительные схемы квадратурного метода решения НСИУ. Основное внимание уделяется теоретическому обоснованию одной из схем метода механических квадратур (м.м.к.).

1. Постановка задачи. Существование и единственность решения

В ряде прикладных задач встречается нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{x(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = y(t), \quad |t| < 1, \quad (1.1)$$

где $h(t, \tau, u)$, $y(t)$ – данные функции, λ – вещественный параметр, а $x(t)$ – искомая функция, причем сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу.

Поскольку задача (1.1), как правило, точно не решается, то для ее решения разработаны и применяются различные приближенные методы (обзор таких методов можно найти, напр., в [1]

, [5], [6]).

Пусть $X = L_{2p}[-1, 1]$, $Y = L_{2q}[-1, 1]$ – лебеговы пространства квадратично-суммируемых на $[-1, 1]$ функций с весами $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, $q(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, и нормами

$$\|x\|_X = \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in X,$$

$$\|y\|_Y = \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} |y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y \in Y,$$

соответственно.

Тогда уравнение (1.1) можно записать как эквивалентное операторное уравнение вида $K(x) \equiv Sx + \lambda Th(x) = y$ ($x \in X, y \in Y$),

где

$$Sx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{x(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad Th(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} h(t, \tau, x(\tau)) d\tau.$$

Рассмотрим соответствующее уравнению (1.1)

характеристическое уравнение

$$Sx \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{x(\tau)}{\tau-t} d\tau = y(t), \quad (x \in X, y \in Y). \quad (1.2)$$

Следующая лемма необходима для анализа однозначной разрешимости исходного уравнения и доказательства сходимости приближенного метода. Пусть $Q_n(t)$ и $R_n(t)$ – полиномы n -й степени из системы полиномов, ортогональных соответственно с весами $p(t)$ и $q(t)$ на отрезке $[-1, 1]$, а $c_k^Q(x)$, $c_k^R(y)$ – коэффициенты Фурье функций $x(t) \in X, y(t) \in Y$ по системам полиномов $\{Q_k(t)\}_0^\infty$ и $\{R_k(t)\}_0^\infty$.

Теорема 1.1. Оператор $S: X \rightarrow Y$ непрерывно обратим, и обратный оператор $S^{-1}: Y \rightarrow X$ определяется по формуле

$$S^{-1}(y; t) \equiv x(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^R(y) Q_k(t),$$

где

$$Q_k(t) = \frac{T_{k+1}(t) - T_k(t)}{t-1} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \arccos t}{\sqrt{1-t}},$$

$$R_k(t) = \frac{T_{k+1}(t) + T_k(t)}{1+t} = \frac{\sqrt{2} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \arccos t}{\sqrt{1+t}}, \quad (1.3)$$

а $T_k(t) = \cos k \arccos t$ – многочлен Чебышева I

рода. При этом для операторов верны оценки

$$\|S\|_{X \rightarrow Y} = 1, \quad \|S^{-1}\|_{Y \rightarrow X} = 1 \quad (1.4)$$

Доказательство. Умножим обе части характеристического уравнения на функцию $\frac{1}{\pi} q(t) R_k(t)$, проинтегрируем по переменной t и поменяем порядок интегрирования в левой части. В результате получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} x(\tau) d\tau \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} R_k(t) dt \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} y(t) R_k(t) dt.$$

Воспользовавшись известным соотношением (см., напр., [2], [7]), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} R_k(t) dt = -Q_k(t), \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} x(\tau) Q_k(\tau) d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} y(t) R_k(t) dt,$$

следовательно,

$$c_k^Q(x) = -c_k^R(y).$$

Поэтому решение характеристического уравнения (1.2) можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^Q(x) Q_k(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k^R(y) Q_k(t). \quad (1.6)$$

Оценим норму обратного оператора. Для этого сначала найдем норму функции $x(t) \in X$. Из (1.6) и с помощью свойств полиномов Чебышева (см., напр., [7], [8])

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q_k(t) Q_j(t) dt = \pi,$$

имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_X^2 &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^Q(x) Q_k(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_k^Q(x) c_j^Q(x) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} Q_k(t) Q_j(t) dt = \\ &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} |c_k^Q(x)|^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из полученных соотношений (1.6)-(1.7) и равенства

Парсеваля для любой функции $x(t) \in X$ находим

$$\|Sx\|_Y^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} |c_k^R(y)|^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} |c_k^Q(x)|^2 = \|x\|_X^2. \quad (1.8)$$

Для любой функции $y(t) \in Y$ в силу (1.8) и равенства Парсеваля находим

$$\|S^{-1}y\|_X^2 = \pi \sum_{k=0}^{\infty} |c_k^R(y)|^2 = \|y\|_Y^2.$$

Отсюда получаем равенства

$$\|Sx\|_Y = \|x\|_X, \quad \|S^{-1}y\|_X = \|y\|_Y,$$

а из них – утверждение теоремы.

В силу теоремы 1.1 доказывается теорема существования и единственности решения уравнения (1.1), а именно, справедлива

Теорема 1.2. Пусть функция $h(t, \tau, u)$

удовлетворяет условиям

$$|h(t, \tau, u_1) - h(t, \tau, u_2)| \leq M|u_1 - u_2|, \quad h(t, \tau, 0) = 0, \quad (1.9)$$

тогда при λ таких, что $|\lambda| < \frac{1}{M}$, уравнение (1.1)

имеет единственное решение при любой правой

части $y(t)$, и $\|x^*\|_X \leq (1-q)^{-1} \|y\|_Y$, $q = |\lambda|M$ (1.10)

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 (см.[4]). Поэтому остановимся лишь на некоторых отличительных моментах. Уравнение (1.1) эквивалентно операторному уравнению

$$x = B(x), \quad B(x) \equiv S^{-1}y - \lambda S^{-1}Th(x)$$

$$(x \in X, B(x): X \rightarrow X). \quad (1.11)$$

Для любых $x, z \in X$, учитывая соотношение (1.4), а также неравенство Коши-Буняковского, последовательно находим

$$\|B(x) - B(z)\|_X = \|\lambda[S^{-1}T[h(x) - h(z)]]\|_X \leq \|\lambda\| \|T[h(x) - h(z)]\|_Y \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \|T[h(x) - h(z)]\|_Y &\leq \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} M|x(\tau) - z(\tau)| d\tau \right\| \leq \\ &\leq \frac{M}{\pi} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} d\tau \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} |x(\tau) - z(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{M}{\sqrt{\pi}} \|x - z\|_X. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, из (1.12)-(1.13) следует оценка

$$\|B(x) - B(z)\|_X \leq |\lambda|M \|x - z\|_X \equiv q \|x - z\|_X,$$

т.е. нелинейный оператор $B: X \rightarrow X$ является сжимающим оператором в пространстве X с коэффициентом сжатия q , определенным в (1.10). Отсюда и из принципа сжимающих отображений (см., напр., [6]) следует, что уравнение (1.11), а, следовательно, эквивалентное ему НСИУ (1.1) имеет единственное решение $x^* \in X$ при любой функции $y \in Y$. Для него справедлива оценка

$$\|x^*\|_X \leq \frac{1}{1-q} \|S^{-1}y - \lambda S^{-1}Th(0)\|_X. \quad (1.14)$$

Из (1.14), в силу (1.9), находим

$$\|x^*\|_X \leq (1-q)^{-1} \|S^{-1}y\|_X \leq (1-q)^{-1} \|y\|_Y.$$

Тем самым утверждение теоремы доказано.

2. Метод механических квадратур

Приведем вычислительную схему метода механических квадратур для уравнения (1.1).

Схема 1. Приближенное решение ищем в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k l_k(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{Q_n(t)}{(t - \tau_k) Q_n'(\tau_k)}, \quad (2.1)$$

где

$$\tau_k = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

- корни многочлена $Q_n(t)$, определенного в (1.3).

Неизвестные коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{1-\tau_k}{\tau_k - t_j} + \lambda \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) h(t_j, \tau_k, \beta_k) = y(t_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.3)$$

где

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+1} \pi \quad (2.4)$$

– корни многочлена $R_n(t)$ из (1.3).

Отметим, что для получения СНАУ (2.3) обе части НСИУ (1.1) приравняем в узлах (2.4), вместо $x(\tau)$ подставляем $x_n(\tau)$ из (2.1), после чего интегралы $S(x_n; t_j) \text{Th}(x_n; t_j)$ вычисляем приближенно по квадратурной формуле с узлами (2.2) (см., напр., [2])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} f(\tau) d\tau \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) f(\tau_k). \quad (2.5)$$

Приведем еще одну вычислительную схему м.м.к. для указанного уравнения.

Схема 2. Приближенное решение задачи (1.1) будем искать в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k Q_{k-1}(t) \in X_n, \quad -1 < t < 1, n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Неизвестные коэффициенты α_k , $k = \overline{1, n}$, будем определять из СНАУ

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k R_{k-1}(t_j) + \frac{\lambda}{2n+1} \sum_{k=1}^n h(t_j, \tau_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k Q_{k-1}(\tau_k)) = y(t_j), \quad j = \overline{1, n} \quad (2.7)$$

Для получения СНАУ (2.7) обе части НСИУ (1.1) приравняем в узлах (2.4), вместо $x(\tau)$ подставляем $x_n(\tau)$ из (2.6), после чего интегралы $S(x_n; t_j) \text{Th}(x_n; t_j)$ вычисляем приближенно по квадратурной формуле (2.5) с узлами (2.2).

Для теоретического обоснования выберем схему 2. Справедливы следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть непрерывные функции $y(t)$ и $h(t, \tau, u)$ таковы, что в условиях теоремы 1.2 решение $x^*(t) \in C[-1, 1]$ и функция $S(x^*; t) \in C[-1, 1]$. Тогда справедливы утверждения:

а) СНАУ (2.3) имеет единственное решение $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*$ при любых $n \in \mathbb{N}$, а приближенное решение

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k^* Q_{k-1}(t), \quad (2.1^*)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|x_n^*\|_{X_n} \leq \frac{\sqrt{\pi} \|y\|_C}{1-q}, \quad (2.8)$$

где q определено в (1.10).

б) приближенные решения (2.1^{*}) сходятся при $n \rightarrow \infty$ к точному решению $x^*(t)$ в среднем со скоростью, определяемой неравенством

$$\|x^* - x_n\|_X \leq \frac{1}{1-q} (2\sqrt{\pi} E_{n-1}(Sx^*)_C + 2|\lambda| \sqrt{\pi} E_{2n-1}^+(h(x^*))_C + |\lambda| M E_{n-1}(x^*)_C),$$

где $E_n(f)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(t) \in C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами

степени n , $E_n^+(h)_C$ – частное наилучшее равномерное приближение функции $h(t, \tau, x_n^*(\tau))$ по переменной τ , а M определено в (1.9).

Доказательство. Обозначим через H_n множество всех алгебраических многочленов степени не выше n , где $n \in \mathbb{N}$. Введем конечномерные подпространства $X_n = H_{n-1} \cap X$, $Y_n = H_{n-1} \cap Y$. Обозначим через $\mathcal{E}_n^t: C \rightarrow Y_n$, $P_n^t: C \rightarrow X_n$ – операторы проектирования, где $P_n^t \varphi(t, \tau)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа функции $\varphi(t, \tau)$ по переменной τ , построенный по узлам (2.2), а $\mathcal{E}_n^t f(t)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа функции $f(t)$, построенный по узлам (2.4).

Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие аппроксимативные свойства введенных выше операторов Лагранжа:

$$\|P_n^t\|_{C \rightarrow X} \leq \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{1-t}{1+t} dt} = \sqrt{\pi}; \quad (2.9)$$

$$\|\mathcal{E}_n^t\|_{C \rightarrow Y} \leq \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{1+t}{1-t} dt} = \sqrt{\pi}; \quad (2.10)$$

$$\|y - \mathcal{E}_n^t y\|_Y \leq 2\sqrt{\pi} E_{n-1}(y)_C, \quad y \in C[-1, 1], n \in \mathbb{N}; \quad (2.11)$$

$$\|\psi - P_n^t \psi\|_X \leq 2\sqrt{\pi} E_{n-1}(\psi)_C, \quad \psi \in C[-1, 1], n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Легко показать, что СНАУ (2.3) эквивалентна операторному уравнению (см., напр., [1])

$$K_n x_n \equiv \mathcal{E}_n^t S x_n + \lambda \mathcal{E}_n^t T P_n^t h(x_n) = \mathcal{E}_n^t y, \quad (x_n \in X_n, \mathcal{E}_n^t y \in Y_n).$$

Поскольку $(\mathcal{E}_n^t)^2 = \mathcal{E}_n^t$ и $Sx_n \in Y_n$ для любого $x_n \in X_n$, то $\mathcal{E}_n^t Sx_n = Sx_n$. Отсюда и в силу (1.4) получаем

$$B_n(x_n) \equiv S^{-1} \mathcal{E}_n^t y - \lambda S^{-1} \mathcal{E}_n^t T P_n^t h(x_n) = x_n, \quad (x_n, S^{-1} \mathcal{E}_n^t y, B_n(x_n) \in X_n) \quad (2.13)$$

Покажем, что оператор $B_n: X_n \rightarrow X_n$ является оператором сжатия.

Для любых $x_n, z_n \in X_n$ последовательно находим, что

$$\begin{aligned} \|B_n(x_n) - B_n(z_n)\|_{X_n} &\leq |\lambda| \|S^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \|\mathcal{E}_n^t\|_{C \rightarrow Y_n} \|TP_n^t[h(x_n) - h(z_n)]\|_C \leq |\lambda| \sqrt{\pi} \cdot \\ &\cdot \left\| \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) [h(t, \tau_k, x_n(\tau_k)) - h(t, \tau_k, z_n(\tau_k))] \right\|_C \leq \\ &\leq |\lambda| \sqrt{\pi} M \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) |x_n(\tau_k) - z_n(\tau_k)| \leq |\lambda| M \frac{2\sqrt{\pi}}{2n+1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (1-\tau_k)} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (1-\tau_k) |x_n(\tau_k) - z_n(\tau_k)|^2} = |\lambda| \frac{M}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k)} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) |x_n(\tau_k) - z_n(\tau_k)|^2} = |\lambda| \frac{M}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{1-\tau}{1+\tau} d\tau} \|x_n - z_n\|_{X_n} = \\ &= |\lambda| M \|x_n - z_n\|_{X_n} \leq q \|x_n - z_n\|_{X_n}. \end{aligned}$$

Поэтому оператор $B_n: X_n \rightarrow X_n$ является сжимающим в пространстве X_n с коэффициентом сжатия $q < 1$. Отсюда следует, что уравнение (2.13) имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любом y

$\in Y$. Для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|x_n^* - x_n\|_{X_n} &= \|B_n(x_n^*) - B_n(0) + B_n(0)\|_{X_n} \leq \|B_n(x_n^*) - B_n(0)\|_{X_n} + \|B_n(0)\|_{X_n} \leq q_0 \|x_n^*\|_{X_n} + \\ &+ \|S^{-1} \mathcal{E}_n^1 y - \lambda S^{-1} \mathcal{E}_n^1 \text{TP}_n^1 h(0)\|_{X_n} \leq q_0 \|x_n^*\|_{X_n} + \|S^{-1}\|_{Y_n \rightarrow X_n} \|\mathcal{E}_n^1\|_{C \rightarrow Y_n} \|y\|_C \leq \\ &\leq q \|x_n^*\|_{X_n} + \sqrt{\pi} \|y\|_C. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда имеем} \quad \|x_n^*\|_{X_n} \leq \frac{\sqrt{\pi} \|y\|_C}{1-q}.$$

Утверждение а) доказано.

Для оценки скорости сходимости приближенного решения x_n^* к точному x^* , используя (1.4) и неравенство треугольника, последовательно находим

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\|_{X_n} &\leq \|S^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \|Sx^* - Sx_n^*\|_Y \leq \|Sx^* - \mathcal{E}_n^1 Sx^*\|_Y + \|\mathcal{E}_n^1 Sx^* - Sx_n^*\|_{Y_n} \leq \\ &\leq \|Sx^* - \mathcal{E}_n^1 Sx^*\|_Y + |\lambda| \|\mathcal{E}_n^1\|_{C \rightarrow Y_n} \|T[h(x^*) - P_n^1 h(x^*)]\|_C + |\lambda| \|\mathcal{E}_n^1\|_{C \rightarrow Y_n} \cdot \\ &\cdot \|\text{TP}_n^1[h(x^*) - h(x_n^*)]\|_C. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Учитывая (2.11), имеем

$$\|Sx^* - \mathcal{E}_n^1 Sx^*\|_Y \leq 2\sqrt{\pi} E_{n-1}(Sx^*)_C.$$

Для второго слагаемого из (2.14) используем соотношения (см., напр., [8])

$$\begin{aligned} |R_n(\phi)| &= \left| \int_a^b p(t) [\phi(t) - P_n(\phi; t)] dt \right| \rightarrow 0, \\ |R_n(\phi)| &\leq 2E_{2n-1}(\phi) \int_a^b p(t) dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

С помощью (2.15) находим оценку

$$|\lambda| \|\mathcal{E}_n^1\|_{C \rightarrow Y_n} \|T[h(x^*) - P_n^1 h(x^*)]\|_C \leq |\lambda| \sqrt{\pi} 2E_{2n-1}(h(x^*))_C \quad (2.21)$$

Так как

$$\begin{aligned} \|\text{TP}_n^1[h(x^*) - h(x_n^*)]\|_C &= \left\| \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) [h(t, \tau_k, x^*(\tau_k)) - \right. \\ &\quad \left. - h(t, \tau_k, x_n^*(\tau_k))] \right\|_C \leq \frac{M}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) \times} \\ &\times \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-\tau_k) \|P_n^1 x^*(\tau_k) - x_n^*(\tau_k)\|^2} \leq \frac{M}{\pi} \sqrt{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} d\tau} \|P_n^1 x^* - x_n^*\|_X = \\ &= \frac{M}{\sqrt{\pi}} \|P_n^1 x^* - x_n^*\|, \end{aligned}$$

то из неравенства (2.14), с учетом (2.9)-(2.12), имеем

$$\|x^* - x_n\|_X \leq 2\sqrt{\pi} E_{n-1}(Sx^*)_C + |\lambda| \sqrt{\pi} 2E_{2n-1}(h(x^*))_C + |\lambda| M \|x^* - x_n^*\|_X + \|x^* - P_n^1 x^*\|_X.$$

Отсюда, окончательно получаем

$$\|x^* - x_n\|_X \leq \frac{1}{1-q} (2\sqrt{\pi} E_{n-1}(Sx^*)_C + 2|\lambda| \sqrt{\pi} E_{2n-1}(h(x^*))_C + |\lambda| M E_{n-1}(x^*)_C).$$

Теорема доказана.

В качестве темы НИРС рассматривался пример приближенного решения НСИУ с использованием пакета Matlab. Основным преимуществом предлагаемого подхода является значительное снижение трудоемкости решения поставленной задачи.

Литература

1. Б.Г.Габдулхаев, Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I-го рода. – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 288 с.
2. И.К.Лифанов, Метод сингулярных интегральных уравнениях и численный эксперимент. – М.: ТОО "Янус", 1995 – 519 с.
3. А.И.Гусейнов, Х.Ш.Мухтаров, Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 414с.
4. Л.Е.Шувалова, Квадратурный метод решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения. // Изв. вузов. Математика. – 2007 – № 6. – с. 77-81.
5. В.В.Иванов, Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. - Киев: Наук. думка. 1986. - 584 с.
6. М.А.Красносельский, Г.М.Вайнко, П.П.Забрейко и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.:Наука, 1969.– 456 с.
7. И.П.Натансон, Конструктивная теория функций. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
8. Б.Г.Габдулхаев, Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 230 с.
9. Р.Г. Мухарлямов, О.В. Матухина, Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та, 15, 12, 220-224 (2012).