

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТОНКОПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ ПО ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ключевые слова: двухфазные среды, процесс фильтрации, ламинарное течение.

Процессы фильтрации двухфазных сред на фильтровальном оборудовании играют важную роль в различных отраслях промышленности. Значительную роль в процессе фильтрации играют условия на входе в аппарат, которые определяют основные параметры: профиль и значение скорости, градиенты давления, концентрации и дисперсии частиц осадка и т.д. Задача решается методом поверхностей равных расходов, проведены численные расчеты, которые показали влияние различных параметров на основные характеристики течения.

Keywords: Two-phase media, process of filtering, laminar flow.

Processes of filtering two-phase media in filtration devices play an important role in various industries. Significant role in the process of filtering is the initial section of flow, which defines the basic parameters: the profile and value of the velocity, pressure gradients, concentration and dispersion of sediment particles, etc.. The problem is solved by the method of surfaces of equal cost, the results enabled to establish the influence of the input section on the filtering process.

### Введение

Во многих технологических процессах широко используются устройства, содержащие проницаемые поверхности. Проектирование и расчёт эффективности работы этих аппаратов связаны с описанием и решением внешних, внутренних и смешанных задач гидродинамики многофазного потока в их рабочих узлах, требуют знания гидродинамических характеристик потоков, учитывая зависимость реологических свойств среды от температуры. В этой работе рассматривается неизотермическое ламинарное тонкопленочное течение гетерогенной среды по проницаемой поверхности. Тонкопленочные неизотермические течения были рассмотрены в ряде работ [1,2]

Для описания реологического состояния среды, как частный случай, можно использовать модель Оствальда де Вилля:

$$\tau_{ij} = 2m \sqrt{2I_2} \left| \right|^{n-1} \mathbf{e}_{ij}, \quad (1)$$

где  $\tau_{ij}$  - тензор напряжения;  $\mathbf{e}_{ij}$  - тензор скоростей деформаций;  $\sqrt{2I_2}$  - интенсивность скоростей деформации.

Целью данной работы является построение математической модели неизотермического тонкопленочного течения двухфазных сред и построение численной схемы, реализующей данную модель.

### Теоретическая часть

Течение рассматривается в ортогональной системе координат, у которой координатная поверхность  $x_2 = const$  совпадает с поверхностью течения, а координатные линии (поверхности)  $x_1 = const$  составляет семейство нормалей к ней.

С учетом проведенного анализа значимости членов упрощенные размерные уравнения сохранения массы и движения дисперсной смеси и энергии для случая двухфазного пленочного течения примут вид [3,4].

$$\frac{\partial(H_2 H_3 \rho_1 U_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H_1 H_3 \rho_1 V_1)}{\partial x_2} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_1 \left( \frac{U_1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{U_1 V_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{\alpha_1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \tau_{12} - F_{12x_1} + \rho_1 F_1, \quad (3)$$

$$\rho_1 \frac{U_1^2}{H_1 H_2} \frac{H_1}{x_2} = \frac{\alpha_1}{H_2} \frac{P}{x_2} - F_{12x_2} + \rho_1 F_2, \quad (4)$$

$$\rho_1 c_{p1} U_1 \frac{T_1}{x_1} + V_1 \frac{T_1}{x_2} = \frac{H_1 H_3}{x_2} \lambda_1 \frac{T_1}{x_2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(H_2 H_3 \rho_2 U_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H_1 H_3 \rho_2 V_2)}{\partial x_2} = 0, \quad (6)$$

$$\rho_2 \left( \frac{U_2}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{V_2}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{U_2 V_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\alpha_2}{H_1} \frac{P}{x_1} + F_{12x_1} + \rho_2 F_1, \quad (7)$$

$$\rho_2 \frac{U_2^2}{H_1 H_2} \frac{H_1}{x_2} = \frac{\alpha_2}{H_2} \frac{P}{x_2} + F_{12x_2} + \rho_2 F_2, \quad (8)$$

$$\rho_2 c_{p2} U_2 \frac{T_2}{x_1} + V_2 \frac{T_2}{x_2} = \frac{H_1 H_3}{x_2} \lambda_2 \frac{T_2}{x_2} \quad (9)$$

где для простоты "вязкостный" член обозначен как

$$\tau_{12} = \frac{1}{H_1^2 H_2 H_3} \frac{H_1}{x_2} m \left| \frac{H_1}{H_2} \frac{U_1}{x_2} \right|^{n-1} \frac{H_1}{H_2} \frac{U_1}{x_2}.$$

Здесь  $c_{pi}$  - удельная теплоемкость  $i$ -ой фазы;  $F(F_1, F_2, F_3)$  - вектор массовых сил и его компоненты в направлении координат  $x_1, x_2, x_3$ ;  $F_{12}$  - вектор силы межфазного взаимодействия;  $H_i$  - коэффициенты Ляме;  $m(\tau_i, \alpha_2)$  - эффективная динамическая вязкость;  $n$  - коэффициент нелинейности;  $P$  - давление, Па;  $T_i$  - температура  $i$ -ой фазы;  $U_i$  - компонента скорости по оси  $x_1$ ;  $V_i$  - компонента скорости по оси  $x_2$ ;  $x_j$  - координата,  $\alpha_i$  - объемная концентрация.

ция  $i$  - ой фазы;  $\lambda_i$  - коэффициент теплопроводности  $i$  - ой фазы;  $\rho_i$  - приведенная плотность  $i$  - ой фазы, кг/м<sup>3</sup>.

Система уравнений (2) - (9) должна решаться при следующих граничных и начальных условиях

$$\text{при } x_2 = 0: P = P_B, U_1 = 0, \quad (10.1)$$

$$\text{при } x_2 = h(x_1): P = P_a, \tau_{12} = 0;$$

$$\lambda \frac{T}{x_2} = \beta [T(h) - T_\epsilon] \quad (10.2)$$

$$\text{при } x_1 = x_{1_{нач}}: \alpha_2 = \alpha_{2_{нач}}, U_i = U_{i_{нач}}(x_2), \quad (10.3)$$

$$V_i = V_{i_{нач}}(x_2); T_i = T_{i_{нач}}(x_2), i = \overline{1, 2}, h = H,$$

здесь  $\beta$  - коэффициент теплоотдачи.

Уравнения движения (2) - (9) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые в квадратурах не интегрируются. В данной работе эта система решается с помощью метода поверхностей равных расходов [5]. В соответствии с этим методом в поле течения суспензии введем линии тока  $y_k = y_k(x_1) = x_{2,k}^i(x_1)$  и представим компоненты скорости  $i$ -ой фазы для  $k$ -ого слоя в виде  $U_i^k = U_i[x_1, y_k(x_1)]$ ,  $V_i^k = V_i[x_1, y_k(x_1)]$ . Здесь  $k = \overline{1, N}$ ,  $N$  - число введенных линий тока. При этом линия  $y^1$  совпадает с поверхностью течения, а последняя линия  $y^N$  со свободной поверхностью. Сведем задачу о развитии течения слоя суспензии к численному определению полей скоростей и линии тока.

Обозначим величину изменения расхода первой фазы между  $k$ -ой и  $(k+1)$ -ой линиями тока через  $\Phi_1^k(x_1)$ . В случае непроницаемой поверхности  $\Phi_1^1(x_1) = 0$ . По определению

$$\frac{d}{H_1 dx_1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \alpha_1 Z U_1 H_2 dx_2 = \Phi_1^k(x_1). \quad (11)$$

При отсутствии массообмена изменение расхода сплошной фазы будет определяться фильтрацией жидкости через пористую проницаемую поверхность. Систему координат выбираем таким образом, чтобы величины  $\alpha_i$ ,  $\delta$ ,  $h$ ,  $U_i$ ,  $V_i$  не зависели от координаты  $x_3$  и обозначим  $Z = H_3(x_{3k} - x_{3n})$ . Тогда интегральное условие сохранения количества сплошной фазы для произвольного сечения можно записать в виде:

$$\int_0^h \alpha_1 Z U_1 H_2 dx_2 + \int_{x_{1H}}^{x_1} \alpha_{10} Z |V_0| H_1 dx_1 = Q_{1H}.$$

Продифференцируем данное соотношение по  $x_1$  и после сравнения с результатом дифференцирования (11) получим

$$\Phi_1^k(x_1) = \alpha_{10} Z V_0 \delta_1^k, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (12)$$

Применяя правило Лейбница, с учетом уравнения (2) вычислим интеграл (11)

$$\Phi_1^k = \alpha_1 Z V_1^k U_1^k \frac{H_2 dy_k}{H_1 dx_1} - \alpha_1 Z V_1^{k+1} U_1^{k+1} \frac{H_2 dy_{k+1}}{H_1 dx_1}.$$

Отсюда, с учетом кинематического условия на свободной поверхности и соотношений (12), получим

$$\alpha_1 Z V_1^k U_1^k \frac{H_2 dy_k}{H_1 dx_1} = \Phi_1^k \delta_1^k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Производные по независимой переменной  $x_1$  имеют вид

$$\frac{d\Theta}{H_1 dx_1} = \frac{\Theta}{H_1 x_1} + \frac{\Theta}{H_2 y_k} \frac{H_2 dy_k}{H_1 dx_1}. \quad (14)$$

Заменив частную производную  $\partial U_1 / \partial x_1$  согласно (14) с учетом соотношений (13) запишем уравнение (3) для  $k$  слоя

$$\frac{\rho_1 U_1^k dU_1^k}{H_1 dx_1} = \frac{\alpha_1}{H_1} \frac{P_k}{x_1} - \frac{\rho_1 U_1^k V_1^k}{H_1 H_2} \frac{H_1}{x_2} + \tau_{12}^k F_{12x_1} + \rho_1 F_1. \quad (15)$$

Интегрируем сумму уравнений (4) и (8) на интервале  $[y_k, y_{k+1}]$

$$P_{k+1} - P_k = M_k, \quad k = \overline{1, N-1},$$

где

$$M_k(x_1) = \int_{y_k}^{y_{k+1}} J(x_1, x_2) dx_2, \quad J(x_1, x_2) = H_2 \rho F_2 + \frac{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}{H_1} \frac{H_1}{x_2}.$$

Преобразуем результирующее соотношение в более удобную форму и дифференцируя по продольной координате, получим

$$\frac{dP_k}{dx_1} = \sum_{\lambda=k}^{N-1} \frac{dM_\lambda}{dx_1}, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (16)$$

Заменив в уравнении (15)  $\frac{\partial P_k}{\partial x_1}$  согласно

(14) с учетом (16), и используя сумму уравнений (4) и (8), для определения поля скоростей сплошной фазы получим систему уравнений

$$\frac{\rho_1 U_1^k dU_1^k}{H_1 dx_1} = \frac{\alpha_1}{H_1} \sum_{\lambda=k}^{N-1} \frac{dM_\lambda}{dx_1} + \alpha_1 J(x_1, x_2) \frac{dy_k}{H_1 dx_1} - \frac{\rho_1 U_1^k V_1^k}{H_1 H_2} \frac{H_1}{x_2} + \tau_{12}^k F_{12x_1} + \rho_1 F_1, \quad k = \overline{2, N}.$$

Аналогично можно получить уравнения для дисперсной фазы. Отпуская промежуточные выводы, приведем окончательное выражение для распределения скоростей  $U_2^k$

$$\frac{\rho_2 U_2^k dU_2^k}{H_1 dx_1} = \frac{\alpha_2}{H_1} \sum_{\lambda=k}^{N-1} \frac{dM_\lambda}{dx_1} + \alpha_2 J(x_1, x_2) \frac{dy_k}{H_1 dx_1} - \frac{\rho_2 U_2^k V_2^k}{H_1 H_2} \frac{H_1}{x_2} + F_{12x_1}^k + \rho_2 F_2, \quad k = \overline{2, N}. \quad (18)$$

Если размеры включений невелики и разность плотностей фаз незначительны, относительное движение фаз может оказаться незначительным. Тогда можно использовать квазигомогенную модель течения двухфазных сред. В квазигомогенном приближении линии тока вводятся вполне однозначно для некоторой эффективной среды с переменными

по продольной координате характеристиками  $\rho(\alpha_2(x_1))$ ,  $\mu(\alpha_2(x_1))$ . Преобразованное уравнение движения эффективной среды можно получить сложением уравнений (17) и (18)

$$\frac{\rho U dU}{H_1 dx_1} = \frac{1}{H_1} \sum_{\lambda=k}^{N-1} \frac{dM_\lambda}{dx_1} + J(x_1, x_2) \frac{dy_k}{H_1 dx_1} \quad (19)$$

$$\frac{\rho UV}{H_1 H_2} \frac{H_1}{x_2} + T^k + \rho F_1.$$

Уравнения для поверхностей равного расхода определим из (11). Для чего представим интеграл по одной из формул численного интегрирования, затем продифференцируем полученную разностную формулу по  $x_1$ . Если проинтегрировать (11) по формуле трапеций, то уравнение для определения поверхности имеет вид

$$\frac{dy_{k+1}}{dx_1} = \frac{dy_k}{dx_1} + \frac{2H_1 \Phi_1^k}{\Delta_k} \frac{y_{k+1} y_k}{\Delta_k} \frac{d\Delta_k}{dx_1}, k = \overline{2, N};$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0;$$

где  $\Delta_k = (\alpha_1 H_2 Z U_1)_k + (\alpha_1 H_2 Z U_1)_{k+1}$ .

Для вычисления "вязкостного" члена сеточные решения записывались в виде разложения в ряд по полной системе базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (10)

$$U = \sum_{j=1}^N A_j(x_1) U_{kj}(x_1). \quad (21)$$

Систему базисных функций можно выбрать в виде [5]

$$U_{kj}(x_1) = \frac{j+1}{j} \eta_k^j \eta_k^j,$$

где  $\eta_k(x_1) = \frac{y_k(x_1)}{y_N(x_1)}$ ;  $j = \overline{1, N}$ ;  $k = \overline{1, N}$ .

Систему базисных функций для температуры можно выбрать в виде:

$$T_j^k(x_1) = (y^k(x_1))^j$$

Потребуем, чтобы скорость и температура, определяемые из (21а), совпали с  $U_1^k(x_1)$  и  $T^k(x_1)$  на линиях  $y^k(x_1)$ . Тогда для определения коэффициентов  $A_j(x_1)$  и  $A_j^T(x_1)$  получим системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N A_j(x_1) U_{kj} [y_k(x_1)] = U_1^k(x_1),$$

$$T^k(x_1) = \sum_{j=1}^N A_j^T(x_1) T_j^k(x_1), \quad k = \overline{1, N}. \quad (21a)$$

Определив значения  $A_j(x_1)$  из системы уравнений, можно вычислить вязкостный член  $\tau_1^{12}$  на соответствующих линиях тока. Определив значения  $A_j^T(x_1)$ , используя разложение (21а) можно вычислить значения температуры  $T^k$  на соответствующих линиях тока. Система (2) - (9), (19) - (20) и граничные условия (10) представляют замкнутую систему уравнений, решение которых при извест-

ных правых частях можно получить одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В уравнениях движения (17) - (19), записанных для любой поверхности равных расходов  $U_k$ ,

присутствует слагаемое  $\frac{\alpha_i}{H_1} \sum_{\lambda=k}^{N-1} \frac{dM_\lambda}{dx_1}$ , которое со-

держит неопределенную величину  $dy^N / dx_1$ . В то

же время производные  $dy^k / dx_1$  определяются с помощью рекуррентных соотношений (20) снизу вверх, начиная с  $dy^1 / dx_1$ . Поэтому для вычисления правых частей системы (17) - (19) необходимо использовать прогонку. Нахождения явных выражений прогоночных коэффициентов целесообразно выполнить после конкретизации области течения и определения коэффициентов Ляме  $H_1, H_2, H_3$ .

Рассмотрим реализацию схемы решения задачи (2) - (10) для неизотермического течения по плоской поверхности.

Пусть слой гетерогенной среды стекает по наклонной плоскости. Выберем декартову систему координат  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  с коэффициентами Ляме  $H_1=1, H_2=1, H_3=1$ . Тогда

$$F_1 = g \sin \varphi, \quad F_2 = g \cos \varphi, \quad J(x, y) = \rho F_2,$$

$$M_k(x) = \rho F_2 (y_{k+1} - y_k), \quad Z = 1.$$

Здесь  $g$  - ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;  $\varphi$  - угол наклона плоскости.

Дифференциальные уравнения (9), (19) - (20) для плоскости единичной толщины ( $Z = 1$ ) имеют вид

$$\rho U^k \frac{dU^k}{dx} = g \cos \varphi (y_N - y_k) \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{dy_N}{dx} +$$

$$+ m \frac{U^k}{y} \frac{U^k}{y} + \rho g \sin \varphi,$$

$$\frac{dy_{k+1}}{dx} = \frac{dy_k}{dx} + \frac{2V_0 \delta_1^k}{\alpha_1 (U^k + U^{k+1})}$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\alpha_1 (U^k + U^{k+1})} \frac{d}{dx} [\alpha_1 (U^k + U^{k+1})].$$

$$U^k \frac{T^k}{x} + V^k \frac{T^k}{y} = a \frac{2T^k}{y},$$

Здесь  $a$  - коэффициент теплопроводности.

Введем безразмерные переменные для данной системы с помощью подстановки

$$x = H \text{Re} \bar{x}, y = H \bar{y}, U_i = U \bar{U}_i, V_0 = \frac{U}{\text{Re}} \bar{V}_0, \quad (22)$$

$$k = H \bar{k}, P = P_B = \rho_0^0 U^2 \bar{P}, \text{Re} = H^N U^2 \rho_H / m_H,$$

Указанная система в безразмерных переменных примет вид (черточки опущены)

$$U^k \frac{dU^k}{dx} = (y_N - y_k) \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{dy_N}{dx} \frac{\text{Cos}}{Fr_g} + \frac{v}{v_H} \frac{2U^k}{y^2} + \frac{\text{Re Sin}}{Fr_g},$$

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{dy_{k-1}}{dx} + \frac{2V_0 \delta_1^k}{\alpha_1(U^k + U^{k-1})} \frac{y_k - y_{k-1}}{\alpha_1(U^k + U^{k-1})} \frac{d[\alpha_1(U^k + U^{k-1})]}{dx},$$

$$U^k \frac{T^k}{x} + V^k \frac{T^k}{y} = \frac{\text{Re}}{\text{Pe}} \frac{2T^k}{y^2},$$

Здесь  $Fr_i = V_{i1}^2 / F_i l_2$  - число Фруда, определяемое компонентом массовой силы, направленной по координате  $x_i$ ;  $Pe = Vl_2/a$  - число Пекле;  $Re = \rho^0 V_{i1} l_2 / m$  - числа Рейнольдса;  $l_j$  - размер области течения в направлении  $x^j$ ;

Для вычисления правых частей методом прогонки первые два уравнения полученной системы приведем к виду

$$y'_k - y'_{k-1} + S_k U'_{k-1} + S_k U'_k = E_k,$$

$$U'_k = D_k + C_k y'_N,$$

$$S_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{U_k + U_{k-1}},$$

$$D_k = \frac{1}{U_k} \left[ \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{y_N}{Fr_g} \frac{y_k}{\alpha_2' \text{Cos} \varphi} + \frac{v}{v_H} \frac{U^k}{y} + \frac{\text{Re Sin} \varphi}{Fr_g} \right],$$

$$C_k = \frac{\text{Cos} \varphi}{U_k Fr_g}, \quad E_k = \frac{2V_0 \delta_1^k}{\alpha_1(U_k + U_{k-1})} + (y_k + y_{k-1}) \frac{\alpha_2'}{\alpha_1}.$$

Здесь и далее номера поверхностей расходов, в обозначениях скорости, для удобства написаны в виде нижнего индекса, а штрихи означают производные по безразмерной продольной координате.

Представим искомую функцию  $y'_k$  в виде прогоночного соотношения

$$y'_k = A_k y'_N + B_k, \quad (24)$$

и подставим в уравнение (23). После несложных преобразований получим явные выражения прогоночных коэффициентов в виде следующих рекуррентных соотношений

$$A_k = A_{k-1} S_k C_{k-1} S_k C_k,$$

$$B_k = B_{k-1} S_k D_{k-1} S_k D_k + E_k, \quad k = \overline{2, N}; \quad (25)$$

$$A_2 = S_2 C_2, \quad B_2 = E_2 S_2 D_2.$$

При  $k = N$  из (24) получим  $y'_N = B_N / (1 - A_N)$ . Далее, обратной прогонкой вычисляются значения правых частей системы дифференциальных уравнений (23).

В качестве примера рассмотрим решение данной задачи в квазигомогенном приближении, когда  $U_1 \approx U_2 = U$ ,  $V_1 \approx V_2 = V$ ,  $T_1 \approx T_2 = T$  систе-

ма уравнений (2)-(9) в случае течения по наклонной плоскости запишется в виде:

$$\frac{(\rho U)}{x_1} + \frac{(\rho V)}{x_2} = 0, \quad (26)$$

$$\rho U \frac{U}{x_1} + V \frac{U}{x_2} = \alpha \frac{P}{x_1} + T_1 + \rho F, \quad (27)$$

$$\alpha \frac{P}{x_2} + \rho F = 0, \quad (28)$$

$$\rho c_p U \frac{T}{x_1} + V \frac{T}{x_2} = \frac{\lambda}{x_2} \frac{T}{x_2}. \quad (29)$$

Система (26) - (29) решается при следующих граничных и начальных условиях:

$$\text{при } x_2 = 0: P = P_B, \quad U = 0, \quad (30.1)$$

$$\text{при } x_2 = h(x_1): P = P_A, \quad \tau_{12} = 0;$$

$$\lambda \frac{T}{x_2} = \beta [T(h) - T_{air}] \quad (30.2)$$

$$\text{при } x_1 = x_{1нач}: \alpha = \alpha_{нач}, \quad U = U_{нач}(x_2),$$

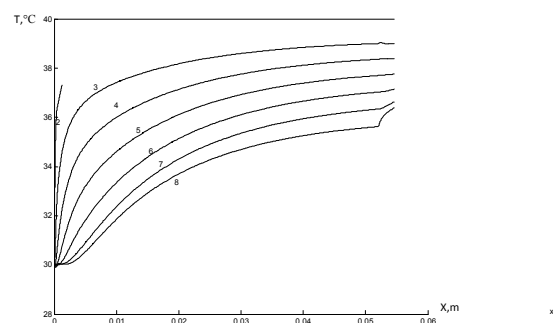
$$V = V_{нач}(x_2); \quad T = T_{нач}(x_2) \quad h = H. \quad (30.3)$$

Для данного примера была разработана программа и выполнены численные расчеты, результаты которых приведены ниже.

### Результаты вычислительного эксперимента

Были рассчитаны процессы обогрева и охлаждения среды как со стороны стенки, так и со стороны свободной поверхности пленки с учетом фильтрации твердой фазы через проницаемую поверхность.

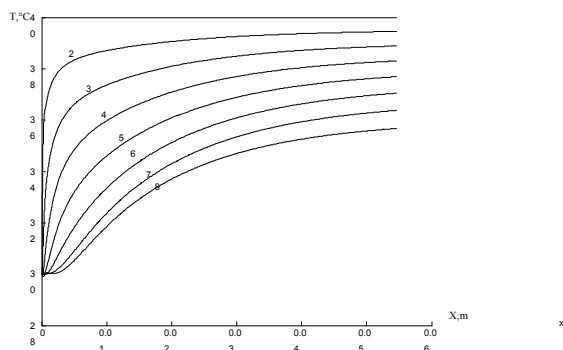
На рис. 1 представлены изменения температуры на линиях тока при движении среды по "горячей" стенке. Изменение температуры начинается с нижнего слоя и передается снизу вверх. После достижения теплового пограничного слоя свободной



**Рис. 1 - Профили температуры на линиях поверхностей равного расхода при  $h_{нач} = 10^{-2}$  м,  $u_{нач} = 10^{-2}$  м/с,  $Re_n = 0.16$ ,  $T_ж = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_{ст} = 40^\circ\text{C}$ ,  $T_в = 30^\circ\text{C}$ ,  $k = 1,27 \cdot 10^{12}$**

поверхности происходит изменение температуры на свободной поверхности пленки. Фильтрация сплошной фазы через проницаемую поверхность приводит к уменьшению толщины слоя гетерогенной среды. Это приводит к изменению положения линий

поверхностей равных расходов. На рис. 2 представлены изменения температуры на линиях тока при течении гетерогенной среды по непроницаемой поверхности.



**Рис. 2 - Профили температуры на линиях поверхностей равного расхода при  $h_{нач} = 10^2 \text{ м}$ ,  $u_{нач} = 10^2 \text{ м/с}$ ,  $Re_n = 0.16$ ,  $T_ж = 30^\circ \text{ С}$ ,  $T_{ст} = 40^\circ \text{ С}$ ,  $T_в = 30^\circ \text{ С}$ ,  $k = 0$**

### Заключение

Проведена адаптация метода поверхностей равных расходов для процессов фильтрования двухфазной среды по проницаемой поверхности в неизотермических условиях, численные расчеты

выполнены в квазигомогенном приближении. Построенная математическая модель позволяет рассчитать процессы неизотермического течения двухфазной среды по проницаемой поверхности при различных тепловых режимах.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России, проект 14.В37.21.0644.*

### Литература

1. *Давыдов А.В.* Гидродинамика тонкопленочного центробежного теплообменника /А.В. Давыдов, В.В. Бронская, Н.Х. Зиннатуллин //Вестник Казан.технол. ун-та. – Казань, 2012. - №23. – с. 145-148.
2. *Кадыйров А.И.* Математическая модель стационарного теплообмена и гидродинамики при ламинарном течении вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока /А.И. Кадыйров, Е.К. Вацагина //Вестник Казан.технол. ун-та. – Казань, 2012. - №19. – с. 49-53.
3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч.1. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1987, 464 с.
4. *Ахмадиев Ф.Г., Фазылзянов Р.Р., Галимов Р.А.* Математическое моделирование тонкослойного неизотермического течения двухфазных сред по проницаемым поверхностям. – ТОХТ, **46**, 6, 620-630(2012).
5. *Холтанов Л.П., Шкадов В.Я.* Гидродинамика и тепло-массообмен с поверхностью раздела. Наука, Москва, 1990, 270 с.

© **Ф. Г. Ахмадиев** – д-р техн. наук, проф., зав. каф. прикладной математики КГАСУ, akhmadiev@kgasu.ru; **Р. Р. Фазылзянов** – канд. техн. наук, доцент той же кафедры; **Р. А. Галимов** – асс. той же кафедры.