

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА

Ключевые слова: компьютерное моделирование, теплообмен, обратные задачи теплообмена, регрессионный анализ.

Представлены результаты математического и компьютерного моделирования, направленного на поиск возможных решений обратной задачи теплообмена. Решение основано на многократной имитации процесса теплообмена при изменяющихся условиях. Задающий модуль генерирует импульсные возмущения теплового потока, которые сказываются на результатах, получаемых программой решения прямой задачи. По результатам имитации разрабатывается регрессионная модель, позволяющая оценить интенсивность теплообмена.

Keywords: computer simulation, heat transfer, inverse problems of heat transfer, regression analysis.

The results of mathematical and computer modeling, aimed at finding possible solutions to the inverse problem of heat transfer. The solution is based on multiple simulation of heat transfer process under varying conditions. The master module generates a pulse of heat flow disturbances that affect the results obtained by the program of the direct problem. According to the results of simulation developed a regression model in order to assess the intensity of the heat.

Введение

Математическое и компьютерное моделирование при решении задач тепло- и массообмена позволяет наиболее эффективно получать результаты в числовой и графической формах [1]. При решении обратных задач оно, практически, не имеет альтернативы, т.к. аналитические методы, в большинстве случаев мало пригодны [2], [3]. Обратные задачи с точки зрения математической формулировки некорректны, что требует дополнительных усилий для получения результата. Компьютерное моделирование позволяет, во многом, помочь в решении проблемы.

В статье приводятся результаты работы по разработке и использованию компьютерной модели для оценки интенсивности теплового потока при заданных значениях температуры в некоторой точке тела, участвующего в процессе теплообмена. Модель включает в себя несколько функциональных модулей с унифицированным интерфейсом. Основным элементом ее структуры является модуль решения прямой задачи, что связано с особенностями технологии решения всей задачи в целом.

Экспериментальная часть

Решение прямой задачи теплообмена в настоящее время имеет важное прикладное значение [4], [5]. Решение обратной задачи требует многократного повторения процесса выполнения основного модуля, который формирует опорные точки для последующей разработки регрессионной модели процесса. Суть решения прямой задачи состоит в поиске корней уравнения теплопроводности при заданных начальных и граничных условиях [6]. По достижению стационарного состояния генерирующий модуль компьютерной модели создает возмущение теплового потока, которое определяет новые параметры начального и граничных условий. Модуль решения прямой задачи формирует эпюры температур как функцию времени в сечении тела,

участвующего в теплообмене, в качестве которого можно использовать некоторые стандартные формы: пластина, цилиндр, шар.

Математическая модель решения прямой задачи включает в себя уравнение теплопроводности при периодических импульсных изменениях теплового потока, нагревающей пластину. Рассмотрим решение задачи для случая, когда плотность теплового потока изменяется по параболическому закону за короткий промежуток времени:

$$\frac{q}{q_{\max}} = 4 \frac{t}{t_{\max}} \left(1 - \frac{t}{t_{\max}} \right). \quad (1)$$

Решение уравнения теплопроводности для точки, расположенной на поверхности при изменяющемся тепловом потоке принимает вид:

$$T_s(t) = T_0 + \frac{4q_{\max}}{\sqrt{\lambda \rho c}} \left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} \left(\frac{t}{t_{\max}} \right)^{1.5} - \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)} \left(\frac{t}{t_{\max}} \right)^{2.5} \right],$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, которая может быть вычислена на основе, например, алгоритма Стирлинга В качестве безразмерного времени в этой модели задается критерий Фурье:

$$t = Fo = at/R^2. \quad (2)$$

Результаты моделирования для случая кратковременного возмущения $t_{\max} = 0,07$, $T_0 = 200$ °С, $q_{\max} = 500$ Вт/(м²), произведение $\lambda \rho c = 42$ (Вт/(м² К)).с показаны на рис. 1.

Анализ решения показывает, что при импульсном возмущении с амплитудой теплового потока 500 Вт/(м²), с некоторым сдвигом по фазе происходит рост температуры поверхности по отношению к начальной температуре до 77,5 градусов. Совпадение решения задачи с известным профилем температуры практически означает получение искомого результата. Таким образом, решение возможно на основе многократных итераций с использованием результатов генерации начальных и граничных условий задающего модуля

и одного из подходящих методов приближения (хорд, касательных, золотого сечения и др.).

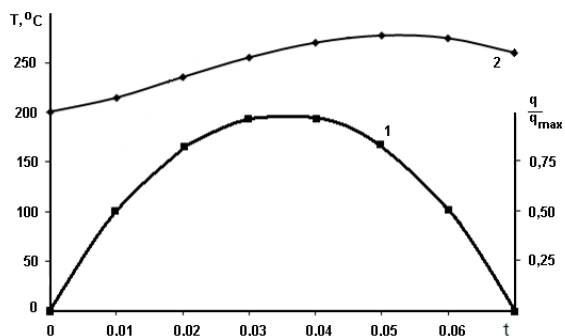


Рис. 1 - График изменения плотности теплового потока (1) и температуры (2) во времени

В работе предлагается заменить процесс последовательных приближений на решение задачи регрессионного анализа. В режиме имитационного моделирования задающий модуль компьютерной модели генерирует по определенному алгоритму стандартные возмущения разной интенсивности. Модуль решения прямой задачи получает соответствующие решения. На основе результатов имитационного моделирования модуль обработки разрабатывает регрессионную модель, которая используется для оценки интенсивности теплообмена. Если достаточно опытного материала существует возможность проведения полноценного регрессионного анализа, в том числе с оценкой адекватности модели.

Рассмотрим решение следующей задачи. На внешней поверхности керамической плоской пластины установлен датчик для измерения температуры. Холодное тело с постоянным распределением температуры по толщине помещается в горячую воздушную среду. Процесс нагрева поверхности тела фиксируется во времени с помощью установленного датчика температуры.

Коэффициент теплообмена является подбираемой величиной. Задавая возмущения теплового потока по определенному закону, в данном случае по параболическому, основной модуль получает несколько решений прямой задачи в форме распределения температур по толщине в разные моменты времени. На рис. 2 показаны графики изменения температуры на поверхности при различных значениях коэффициента теплообмена, полученные в результате имитационного моделирования.

Графики 1, 3 и 4 получены в ходе моделирования. График 2 построен по результатам измерений температуры датчиком, расположенным на поверхности.

Решение обратной задачи выполняется модулем обработки на основе регрессионного анализа. Он разрабатывает регрессионные модели для каждой точки в форме полинома, которые связывают температуру на поверхности и коэффициент теплообмена в разные моменты времени.

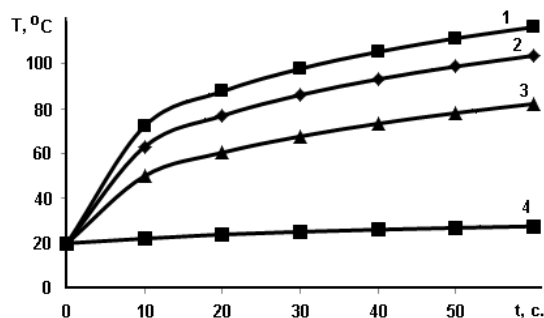


Рис. 2 - Графики изменения температуры во времени для поверхности пластины при различных значениях коэффициента теплообмена: 1 – 100 Вт/(м²С), 2 – 81,3 Вт/(м²С), 3 – 50 Вт/(м²С), 4 – 5 Вт/(м²С)

Решение задачи для точек кривой 2 на основе модели дает среднее значение коэффициента теплообмена 81,3 Вт/(м²С). Дисперсия результатов равна 0,479 (Вт/(м²С))².

Модуль обработки производит проверку адекватности регрессионной модели на основе стандартной технологии регрессионного анализа. Дисперсия воспроизводимости температур, рассчитанная по отклонениям этих пар значений составляет 8,98. Дисперсия температур, полученная по разбросу результатов моделирования равна 9,22. Проверка однородности дисперсий, выполненная на основе использования критерия Фишера показывает, что при уровне значимости 0,05 разработанная модель позволяет адекватно описывать изучаемый процесс.

На основе рассмотренного метода можно построить калориметр, позволяющий определять коэффициент теплообмена в различных сечениях аппарата, реализующего конвективный теплообмен. Датчик изготавливается из материала со стабильными теплофизическими свойствами в интересующем диапазоне температур. Возмущение плотности теплового потока задается в ступенчатой форме.

Компьютерная программа производит вычисления с использованием математической модели, записанной в безразмерной форме. В ее основу положено разложение дифференциального уравнения теплопроводности для рассматриваемых граничных и начальных условий в тригонометрический ряд Фурье:

$$\theta(\tau, x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k}{\mu_k + \sin \mu_k \cos \mu_k} \cos\left(\mu_k \frac{x}{R}\right) \exp\left(-\mu_k^2 \frac{a\tau}{R^2}\right),$$

где μ_k – константы интегрирования, которые определяются методом последовательных приближений, как точки пересечения графиков функций (рис. 3). Точка пересечения графика функции ctg и прямой дает константу интегрирования при текущем члене ряда i . Представленный здесь ряд Фурье хорошо сходится, что позволяет ограничиться небольшим количеством его членов.

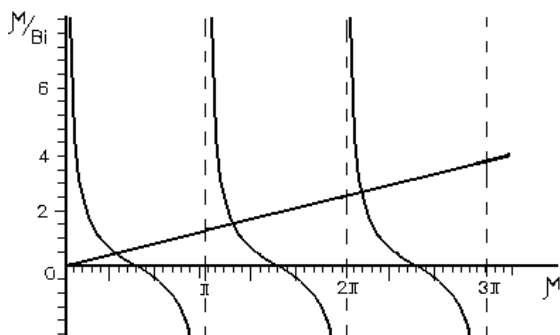


Рис. 3 – Пояснения к алгоритму вычисления констант интегрирования; показаны результаты для первых трех членов ряда, как точки пересечения графиков $\sigma g \mu$ и μ / Bi

В качестве примера покажем результаты работы с калориметром из электротехнической меди, который устанавливается в дискретный слой из инертного материала. Результаты измерений и моделирования показаны на рис. 4. В аппарате создается ступенчатое возмущение теплового потока. Рост температуры теплоносителя, зафиксированный термопарой, при таком возмущении тоже близок к ступенчатой форме (кривая 1). Термопара, установленная на внутренней теплоизолированной поверхности калориметра, фиксирует более плавный рост температуры (кривая 2).

Кривая 3 отображает результаты имитационного моделирования при решении обратной задачи теплообмена с помощью компьютерной модели, которые получены для случая наилучшего приближения. Этот случай определяет результат решения задачи – коэффициент теплообмена, значение которого для профиля температур, измеренного термопарой составляет величину 9,62 Вт/(м²·°C).

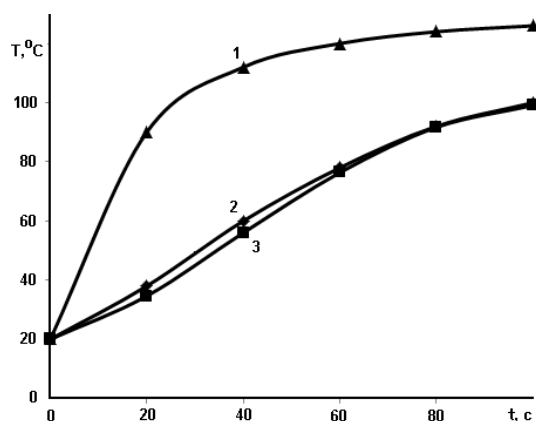


Рис. 4 – Результаты измерений и моделирования в форме графика изменения температуры: 1 – теплоносителя, 2 – в центре калориметра измеренная, 3 – в центре калориметра рассчитанная

Заключение

Таким образом, результаты работы показывают, что решение обратной задачи теплообмена может быть выполнено с помощью компьютерной модели, включающей в себя модули решения прямой задачи, генерации стандартных возмущений и обрабатывающего модуля, основанного на решении задачи регрессионного анализа. Компьютерная модель имеет удобный пользовательский интерфейс, включающий Мастера ввода исходных данных, блок визуализации результатов расчетов, а также средства автоматизированной подготовки текста отчета на основе экспорта данных в рабочую книгу табличного процессора с помощью AxtiveX-технологии. В качестве перспектив развития компьютерной модели можно отметить возможность дополнения модуля ввода данных средствами автоматического считывания показаний термопар непосредственно в компьютер. Это потребует подключения дополнительного электронного оборудования и некоторого изменения программного обеспечения.

Литература

1. Е.К. Вачагина, Г.Р. Халитова, Ю.В. Караева, И.А. Трахунова. *Вестник Казанского технологического университета*, 19, 33 - 37 (2012).
2. В.В. Никешин, Д.А. Бурмистров, А.В. Клинов. *Вестник Казанского технологического университета*, 14, 93 - 96 (2012).
3. А.Г. Сайфетдинов, М.С. Хамидуллин, И.Г. Хисамеев. *Вестник Казанского технологического университета*, 14, 100 - 103 (2012).
4. М.А. Таймаров, А.А. Жбанов. *Вестник Казанского технологического университета*, 16, 60 - 62 (2012).
5. А.М. Абдуллин. *Вестник Казанского технологического университета*, 11, 69 - 72 (2012).
6. С.В. Анаников. *Вестник Казанского технологического университета*, 3, 58 - 63 (2013).