

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

РАСЧЕТ ВТОРОГО МОМЕНТА ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе представлен алгоритм расчёта второго начального момента длины очереди открытых систем массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди в стационарном режиме функционирования.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

This paper presents an algorithm of calculation of the second initial moment the length of the queue of open queueing systems with a polycomponent input stream and a great number of restrictions on the length of the queue in the stationary mode of functioning.

В опубликованных ранее работах авторов [1 - 11] было введено понятие открытых систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков, являющихся комбинациями систем массового обслуживания (СМО) различных типов, в частности, многолинейной классической СМО, СМО с отказами и СМО с очередью конечной длины, а также исследованы основные характеристики стационарных режимов систем массового обслуживания такого типа. Напомним, что при этом рассматриваемая СМО имеет m обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.

- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;

- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;

- h -й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_h . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_h или более требований, вновь поступившая заявка h -го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

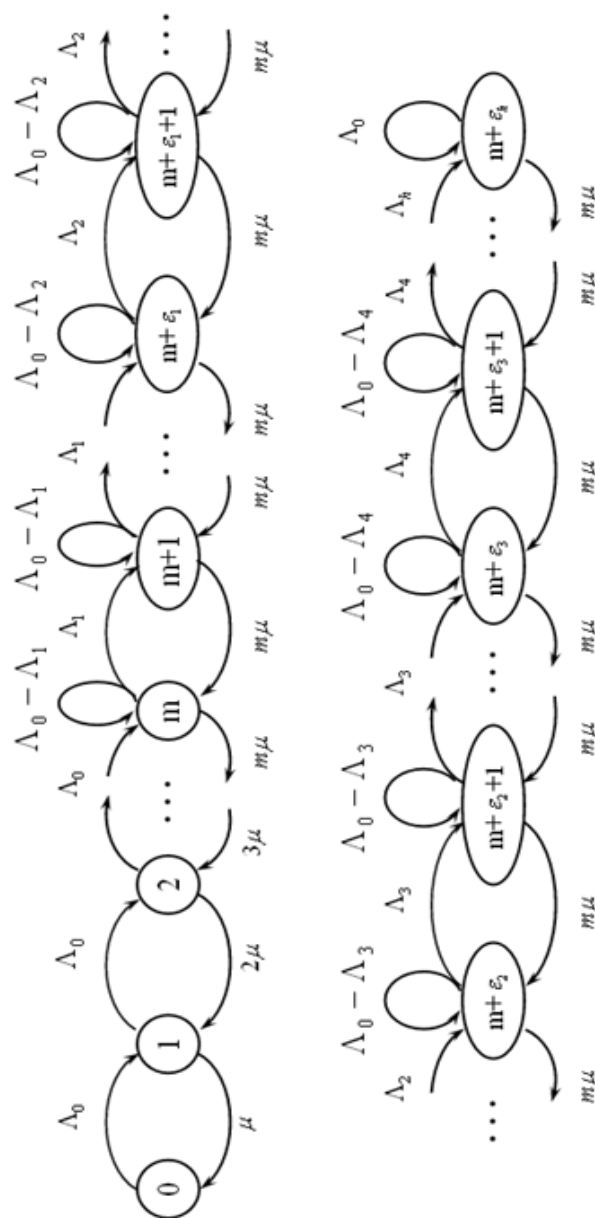


Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

Потоки заявок такого рода было предложено называть поликомпонентными, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным правилам, - системами дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков [5, 6]. Граф состояний и переходов такой СМО приведён на рис.1.

Принятые обозначения:

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \quad \varepsilon_1 = E_1; \quad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \dots$$

$$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^j E_i = \sum_{i=1}^j E_i \text{ - ограничения длины очереди}$$

для заявок j-го типа;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^h \lambda_j; \quad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j; \quad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^h \lambda_j; \dots$$

$\Lambda_h = \lambda_h$; где λ_j - интенсивности потоков заявок j-го типа;

$$R_0 = \sum_{j=0}^h \rho_j; \quad R_1 = \sum_{j=1}^h \rho_j; \quad R_2 = \sum_{j=2}^h \rho_j; \dots$$

$$R_h = \rho_h; \quad R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu}, \text{ где } \rho_j \text{ - приведенные интен-}$$

сивности потоков заявок j-го типа.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j , суммарные поликомпонентные

потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [12]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим за μ . В этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m -го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учетом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. В настоящей работе с учётом формул, полученных для вероятностей стационарных состояний, приведенных в работе [10], по методике [13, 14] найдена общая зависимость осреднённого квадрата длины очереди от параметров входного потока заявок в стационарном режиме работы системы, именно:

$$\begin{aligned} \overline{l^2} &= \sum_{i=m+1}^{m+\varepsilon_h} (i-m)^2 P_i = P_{m+1} + 4P_{m+2} + \dots + \\ &+ \varepsilon_1^2 P_{m+\varepsilon_1} + (\varepsilon_1+1)^2 P_{m+\varepsilon_1+1} + (\varepsilon_1+2)^2 P_{m+\varepsilon_1+2} + \\ &+ \dots + \varepsilon_2^2 P_{m+\varepsilon_2} + (\varepsilon_2+1)^2 P_{m+\varepsilon_2+1} + \dots + \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} = \\ &= P_{m+1} + 4P_{m+2} + \dots + \\ &+ \varepsilon_1^2 (P_{m+\varepsilon_1} + P_{m+\varepsilon_1+1} + P_{m+\varepsilon_1+2} + \dots + P_{m+\varepsilon_2-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2\varepsilon_1 (P_{m+\varepsilon_1+1} + 2P_{m+\varepsilon_1+2} + \dots + (E_2-1)P_{m+\varepsilon_2-1}) + \\ &+ P_{m+\varepsilon_1+1} + 4P_{m+\varepsilon_1+2} + \dots + (E_2-1)^2 P_{m+\varepsilon_2-1} + \\ &+ \varepsilon_2^2 (P_{m+\varepsilon_2} + P_{m+\varepsilon_2+1} + P_{m+\varepsilon_2+2} + \dots + P_{m+\varepsilon_3-1}) + \\ &+ 2\varepsilon_2 (P_{m+\varepsilon_2+1} + 2P_{m+\varepsilon_2+2} + \dots + (E_3-1)P_{m+\varepsilon_3-1}) + \\ &+ P_{m+\varepsilon_2+1} + 4P_{m+\varepsilon_2+2} + \dots + (E_3-1)^2 P_{m+\varepsilon_3-1} + \dots + \\ &+ \varepsilon_h^2 (P_{m+\varepsilon_h-1} + P_{m+\varepsilon_h-1+1} + P_{m+\varepsilon_h-1+2} + \dots + P_{m+\varepsilon_h-1}) + \\ &+ 2\varepsilon_{h-1} \times \\ &\times (P_{m+\varepsilon_{h-1}+1} + 2P_{m+\varepsilon_{h-1}+2} + \dots + (E_h-1)P_{m+\varepsilon_h-1}) + \\ &+ P_{m+\varepsilon_{h-1}+1} + 4P_{m+\varepsilon_{h-1}+2} + \dots + (E_h-1)^2 P_{m+\varepsilon_h-1} + \\ &+ \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} = \\ &= \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_1}{m} \left[1 + 4 \frac{R_1}{m} + \dots + (E_1-1)^2 \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1-2} \right] + \\ &+ \varepsilon_1^2 P_{E_2} + 2\varepsilon_1 \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_2}{m} \times \\ &\times \left[1 + 2 \frac{R_2}{m} + \dots + (E_2-1) \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2-2} \right] + \\ &+ \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_2}{m} \times \\ &\times \left[1 + 4 \frac{R_2}{m} + \dots + (E_2-1)^2 \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2-2} \right] + \\ &+ \varepsilon_2^2 P_{E_3} + 2\varepsilon_2 \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_3}{m} \times \\ &\times \left[1 + 2 \frac{R_3}{m} + \dots + (E_3-1) \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3-2} \right] + \\ &+ \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_3}{m} \times \\ &\times \left[1 + 4 \frac{R_3}{m} + \dots + (E_3-1)^2 \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3-2} \right] + \dots + \\ &+ 2\varepsilon_{h-1} \left(\frac{R_{h-1}}{m} \right)^{E_{h-1}} \dots \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_h}{m} \times \\ &\times \left[1 + 2 \frac{R_h}{m} + \dots + (E_h-1) \left(\frac{R_h}{m} \right)^{E_h-2} \right] + \varepsilon_{h-1}^2 P_{E_h} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{R_{h-1}}{m} \right)^{E_{h-1}} \cdots \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0 \frac{R_h}{m} \times \\
& \times \left[1 + 4 \frac{R_h}{m} + \cdots + (E_h - 1)^2 \left(\frac{R_h}{m} \right)^{E_h - 2} \right] + \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} = \\
& = \sum_{i=1}^{h-1} \varepsilon_i^2 P_{\varepsilon_i+1} + \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} + \\
& + \frac{R_0^m}{m!} P_0 \sum_{i=1}^h \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_i}{m} \times \\
& \times \left[\frac{1 + \frac{R_i}{m} - E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} - (E_i - 1)^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i+1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\left[2(E_i - 1)^2 + 2(E_i - 1) - 1 \right] \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} \right] + \\
& + 2 \frac{R_0^m}{m!} P_0 \sum_{i=2}^h \varepsilon_{i-1} \prod_{g=0}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{R_i}{m} \times \\
& \times \frac{1 - E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} + (E_i - 1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2}. \\
& \frac{R_i}{m} \left[\frac{1 + \frac{R_i}{m} - E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} - (E_i - 1)^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i+1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\left[2(E_i - 1)^2 + 2(E_i - 1) - 1 \right] \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} \right] = \\
& = \frac{R_i}{m} \left[\frac{1 + \frac{R_i}{m} - E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(E_i - 1)^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \\
& \left. + \frac{\left[E_i^2 - 2E_i + 1 + 2E_i - 2 - 1 \right] \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} \right] = \\
& = \frac{R_i}{m} \left[\frac{1 + \frac{R_i}{m} - E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{(E_i - 1)^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) - 2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} \right] = \\
& = \frac{R_i}{m} \left[\frac{1 + \frac{R_i}{m} - E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{-2E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) - 2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} \right] = \\
& = \frac{R_i}{m} \frac{\left(1 + \frac{R_i}{m} \right) \left(1 - \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i} \right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} - \\
& - \frac{E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{1 - \frac{R_i}{m}} - \frac{2E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i+1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{l^2} &= \sum_{i=1}^{h-1} \varepsilon_i^2 P_{Bi+1} + \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} + \sum_{i=1}^h \left[\frac{R_i(m+R_i)}{(m-R_i)^2} P_{Bi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{mE_i^2}{m-R_i} P_{m+\varepsilon_i} - \frac{2E_i m R_i}{(m-R_i)^2} P_{m+\varepsilon_i} \right] + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^h \varepsilon_{i-1} \left[\frac{R_i}{m-R_i} P_{Bi} - \frac{mE_i}{m-R_i} P_{m+\varepsilon_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^h \left[\frac{R_i}{m-R_i} \left(\frac{m+R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{Bi} + \varepsilon_{i-1}^2 P_{Bi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{mE_i}{m-R_i} \left(E_i + \frac{2R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{m+\varepsilon_i} \right] + \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что при приближении приведенной интенсивности входного потока R_i к значению, равному числу обслуживающих устройств m полученная формула неприменима, поскольку даёт неопределённость. Для раскрытия неопределённости, применяя правило Лопиталя, найдём предел

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} &\left[\frac{1 + \frac{R_i}{m} - E_i^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} - (E_i-1)^2 \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i+1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left[2(E_i-1)^2 + 2(E_i-1) - 1 \right] \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^3} \right] = \\ &= \lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} \left[\frac{1 - E_i^2 (E_i-1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-2}}{-3 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-(E_i-1)^2 (E_i+1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{-3 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left[2(E_i-1)^2 + 2(E_i-1) - 1 \right] E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1}}{-3 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} \left[\frac{-E_i^2 (E_i-1)(E_i-2) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-3}}{6 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-(E_i-1)^2 (E_i+1) E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1}}{6 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left[2(E_i-1)^2 + 2(E_i-1) - 1 \right] E_i (E_i-1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-2}}{6 \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)} \right] = \\ &= \lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} \left[\frac{-E_i^2 (E_i-1)(E_i-2)(E_i-3) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-4}}{-6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-(E_i-1)^3 (E_i+1) E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-2}}{-6} + \right. \\ &\quad \left. + \left[2(E_i-1)^2 + 2(E_i-1) - 1 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{E_i (E_i-1)(E_i-2) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-3}}{-6} \right] = \\ &= -\frac{1}{6} E_i (E_i-1) \left[-E_i (E_i^2 - 2E_i - 3E_i + 6) + \right. \\ &\quad \left. + 2(E_i^2 - 2E_i + 1)(E_i-2) + 2(E_i-1)(E_i-2) - \right. \\ &\quad \left. - (E_i-2) - (E_i^2 - 2E_i + 1)(E_i+1) \right] = \\ &= -\frac{1}{6} E_i (E_i-1) \left[-E_i^3 + 2E_i^2 + 3E_i^2 - 6E_i + 2E_i^3 - \right. \\ &\quad \left. - 4E_i^2 + 2E_i - 4E_i^2 + 8E_i - 4 + 2E_i^2 - 2E_i - 4E_i + \right. \\ &\quad \left. + 4 - E_i + 2 - E_i^3 + 2E_i^2 - E_i - E_i^2 + 2E_i - 1 \right] = \\ &= \frac{(E_i-1)E_i(2E_i-1)}{6}. \\ &\lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} \frac{1 - E_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i-1} + (E_i-1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{E_i}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} \frac{-E_i(E_i-1)\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i-2} + (E_i-1)E_i\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i-1}}{-2\left(1-\frac{R_i}{m}\right)} = \\
&= \lim_{\frac{R_i}{m} \rightarrow 1} \left[\frac{-E_i(E_i-1)(E_i-2)\left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i-3}}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(E_i-1)^2 E_i \left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i-2}}{2} \right] = \frac{E_i(E_i-1)}{2}.
\end{aligned}$$

В общем случае осреднённый квадрат длины очереди запишется в виде

$$\begin{aligned}
\overline{l^2} &= \sum_{i=1}^{h-1} \varepsilon_i^2 P_{Bi+1} + \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} + \\
&+ \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{R_i(m+R_i)}{(m-R_i)^2} P_{Bi} - \frac{mE_i^2}{m-R_i} - \right. \\
&\quad \left. \frac{(E_i-1)E_i(2E_i-1)}{6} P_{m+\varepsilon_{i-1}}, \quad R_i = m \right. \\
&\quad \left. - \frac{2E_imR_i}{(m-R_i)^2} P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i \neq m \right\} + \\
&+ 2 \sum_{i=2}^h \varepsilon_{i-1} \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} P_{Bi} - \frac{mE_i}{m-R_i} P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i \neq m \right. \\
&\quad \left. \frac{(E_i-1)E_i}{2} P_{m+\varepsilon_{i-1}}, \quad R_i = m \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^h \left[\varepsilon_{i-1}^2 P_{Bi} + \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} \left(\frac{m+R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{Bi} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (E_i-1)E_i \left(\frac{2E_i-1}{6} + \varepsilon_{i-1} \right) P_{m+\varepsilon_{i-1}}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{mE_i}{m-R_i} \left(E_i + \frac{2R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i \neq m \right\} + \right. \\
&\quad \left. R_i = m \right] + \\
&+ \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h}.
\end{aligned}$$

Результаты расчётов, полученные в настоящей работе, продолжают результаты, опубликованные ранее в цикле работ [1 - 11] и могут быть полезны при проектировании и эксплуатации широкого класса объектов и систем, работающих по принципу систем массового обслуживания.

Литература

1. Кирпичников, А.П. Открытая одноканальная система массового обслуживания с отказами и неограниченной очередью / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2006. - № 4. - С. 78 - 85.
2. Кирпичников, А.П. Системы массового обслуживания с отказами и неограниченной очередью / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Обзорение прикл. и промышл. матем. - 2007. - Т. 14 - Вып. 5. - С. 893 - 896.
3. Кирпичников, А.П. Методика оптимальной организации систем массового обслуживания с отказами и очередью / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Обзорение прикл. и промышл. матем. - 2008. - Т. 15 - Вып. 6. - С. 1090 - 1091.
4. Кирпичников, А.П. Системы обслуживания с неоднородным входным потоком требований, отказами и очередью / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2011. - № 5. - С. 154 - 161.
5. Титовцев, А.С. Открытые многоканальные системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков: дис. ... канд. техн. наук / А.С. Титовцев. - Казань, 2011. - 143 с.
6. Титовцев А. Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012.
7. Кирпичников, А.П. Открытые системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2012. - Т.15-№ 1. - С. 148 - 152.
8. Кирпичников, А.П. О нестационарном режиме в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2012. - Т.15-№ 6. - С. 201 - 202.
9. Кирпичников, А.П. Характеристики систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2012. - Т.15-№ 8. - С. 337 - 340.
10. Кирпичников, А.П. Вероятностные характеристики систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2013. - Т.16-№ 6. - С. 248 - 252.
11. Кирпичников, А.П. Расчёт средней длины очереди в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков / А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. - 2013. - Т.16-№ 11. - С. 255 - 257.
12. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: ГИФМЛ, 1963.
13. Кирпичников А.П. Прикладная теория массового обслуживания. Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2008.
14. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания. Казань: Изд-во Казанского университета, 2011.