

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Ключевые слова: задачи термоупругости, фундаментальное решение.

В работе находится матричное фундаментальное решение квазистатической связанной задачи термоупругости для неограниченной изотропной среды.

Keywords: thermoelasticity problem, a fundamental solution.

The work is a fundamental matrix solution of the problem related to the quasi-static thermoelasticity for an infinite isotropic medium.

Система уравнений квазистатической связанной задачи термоупругости для однородной и изотропной среды имеет вид:

$$\mu u_{i,jj}(\mathbf{r}, t) + (\lambda + \mu) u_{i,ii}(\mathbf{r}, t) + F_i(\mathbf{r}, t) = \gamma \theta_{,i}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\theta_{,jj}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\chi} \dot{\theta}(\mathbf{r}, t) - \eta \dot{u}_{i,i}(\mathbf{r}, t) = -\frac{Q(\mathbf{r}, t)}{\chi} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – радиус-вектор пространственных координат, t – время, $\theta = T - T_0$ – малое приращение температуры, T_0 и T – начальная и текущая температура тела, $u_i(\mathbf{r}, t)$ – смещения, μ, λ – изотермические постоянные Ламе,

$\chi = \frac{K}{\delta}$ – коэффициент температуропроводности, K – коэффициент теплопроводности, δ – удельная теплоемкость единицы объема, $\gamma = (2\mu + 3\lambda)\alpha$, α – коэффициент теплового расширения, $\eta = \gamma T_0 / K$, $Q(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{q(\bar{\mathbf{r}}, t)}{\delta}$ – распределённые источники тепла,

$q(\bar{\mathbf{r}}, t)$ – количество тепла, производимое в единице объема за единицу времени, $F_i(\mathbf{r}, t)$ – объёмные массовые силы, точкой обозначено дифференцирование по времени.

При помощи матричного фундаментального решения системы уравнений (1), (2) поле смещений и температур для неограниченной среды можно представить в виде свёртки:

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_{R^3} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) f_\beta(\mathbf{r}_1, t) dV(\mathbf{r}_1) \quad (3)$$

Здесь $u_\alpha = \{u_i, \theta\}$, $f_\beta = \{F_i, Q/\chi\}$.

Предполагая однородность начальных условий, применим к (1) (2) и (3) преобразование Лапласа по времени: $\bar{g}(\mathbf{r}, p) = \int_0^{+\infty} g(\mathbf{r}, t) e^{-pt} dt$.

Здесь $\bar{g}(\mathbf{r}, p)$ – изображение функции $g(\mathbf{r}, t)$, $p = \sigma + i\omega$ – параметр преобразования Лапласа. В результате получим:

$$\mu \bar{u}_{i,jj}(\mathbf{r}, p) + (\lambda + \mu) \bar{u}_{i,ii}(\mathbf{r}, p) + \bar{F}_i(\mathbf{r}, p) = \gamma \bar{\theta}_{,i}(\mathbf{r}, p), \quad (4)$$

$$\bar{\theta}_{,jj}(\mathbf{r}, p) - \frac{p}{\chi} \bar{\theta}(\mathbf{r}, p) - \eta p \bar{u}_{i,i}(\mathbf{r}, p) = -\frac{\bar{Q}(\mathbf{r}, p)}{\chi}, \quad (5)$$

$$\bar{u}_\alpha(\mathbf{r}, p) = \int_{R^3} \bar{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, p) \bar{f}_\beta(\mathbf{r}_1, p) dV(\mathbf{r}_1) \quad (6)$$

Применим к (4), (5) и (6) преобразование Фурье по координатам: $f^*(\mathbf{k}) = \int_V f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$, где

$\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ – векторный параметр преобразования. В пространстве Фурье получим систему алгебраических уравнений относительно трансформант смещений и температур:

$$(\lambda + \mu) k_i k_i \bar{u}_i^*(\mathbf{k}, p) + \mu k^2 \bar{u}_i^*(\mathbf{k}, p) - i \eta k_i \bar{\theta}^*(\mathbf{k}, p) = \bar{F}_i^*(\mathbf{k}, p) \quad (7)$$

$$\left(k^2 + \frac{p}{\chi} \right) \bar{\theta}^*(\mathbf{k}, p) - i p \eta k_i \bar{u}_i^*(\mathbf{k}, p) = -\frac{\bar{Q}^*(\mathbf{k}, p)}{\chi} \quad (8)$$

$$\bar{u}_\alpha^*(\mathbf{k}, p) = \bar{G}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, p) \bar{f}_\beta^*(\mathbf{k}, p). \quad (9)$$

После преобразований решение системы уравнений (7), (8) запишется в виде:

$$\bar{u}_i^*(\mathbf{k}, p) = \frac{1}{\mu k^2} \left(\delta_{ii} - \frac{(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} a_{ii} \right) \left(\bar{F}_i^*(\mathbf{k}, p) + \frac{i \eta k_i}{k^2 + \frac{p}{\chi}} \bar{Q}^*(\mathbf{k}, p) \right) \quad (10)$$

$$\bar{\theta}^*(\mathbf{k}, p) = \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + 2\mu) \left(k^2 + \frac{p}{\chi} \right)} \frac{\bar{Q}^*(\mathbf{k}, p)}{\chi} + \frac{i(\lambda - \lambda) k_i}{\gamma k^2 (\lambda + 2\mu)} \bar{F}_i^*(\mathbf{k}, p) \quad (11)$$

где введены обозначения: $a_{ii} = \frac{k_i k_i}{k^2}$,

$$\Lambda = \lambda + \frac{p \eta}{k^2 + \frac{p}{\chi}}.$$

Отсюда с учётом (9) имеем:

$$\bar{G}_{ii}^*(\mathbf{k}, p) = \frac{1}{\mu k^2} \left(\delta_{ii} - \frac{\Lambda + \mu}{\Lambda + 2\mu} a_{ii} \right),$$

$$\bar{G}_{i4}^*(\mathbf{k}, p) = \frac{i \eta k_i}{\left(k^2 + \frac{p}{\chi} \right) (\Lambda + 2\mu)} = \frac{i k_i (\Lambda - \lambda)}{p \eta (\Lambda + 2\mu)},$$

$$\bar{G}_{4i}^*(\mathbf{k}, p) = \frac{i k_i (\Lambda - \lambda)}{\gamma k^2 (\Lambda + 2\mu)},$$

$$\bar{G}_{44}^*(\mathbf{k}, p) = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\left(k^2 + \frac{p}{\chi} \right) (\Lambda + 2\mu)} = \frac{(\Lambda - \lambda)(\lambda + 2\mu)}{p \eta (\Lambda + 2\mu)}.$$

Применяя к этим соотношениям последовательно обратное преобразование Фурье

$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} f^*(k) e^{ik \cdot r} dk$ и обратное преобразо-

вание Лапласа $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp$, оконча-

тельно запишем аналитические выражения для компонентов матричного фундаментального решения связанной задачи термоупругости:

$$G_{il}(r-r_1, t) = \frac{1}{16\pi^4 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \int_{R^3} \frac{1}{\mu k^2} \left(\delta_{il} - \frac{\Lambda + \mu}{\Lambda + 2\mu} a_{il} \right) e^{ik \cdot r} dk \right\} e^{pt} dp$$

$$G_{i4}(r-r_1, t) = \frac{1}{16\pi^4 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \int_{R^3} \frac{ik_i(\Lambda - \lambda)}{p\eta(\Lambda + 2\mu)} e^{ik \cdot r} dk \right\} e^{pt} dp$$

$$G_{4l}(r-r_1, t) = \frac{1}{16\pi^4 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \int_{R^3} \frac{ik_l(\Lambda - \lambda)}{\gamma k^2(\Lambda + 2\mu)} e^{ik \cdot r} dk \right\} e^{pt} dp$$

$$G_{44}(r-r_1, t) = \frac{1}{16\pi^4 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \int_{R^3} \frac{(\Lambda - \lambda)(\lambda + 2\mu)}{p\eta(\Lambda + 2\mu)} e^{ik \cdot r} dk \right\} e^{pt} dp$$

Литература

1. *Сергеева, Е.А.* Прочностные характеристики композиционных материалов на основе плазмоактивированных сверхвысокомолекулярных полиэтиленовых волокон / Сергеева Е.А., Ибатуллина А.Р., Брысаев А.С. – Казань: Изд-во «Вестник казанского технологического университета», т.15, №18, стр. 133-136.
2. *Кадыров, А.И.* Математическая модель стационарного теплообмена и гидродинамики при ламинарном течении вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока / Кадыров А.И., Вацагина Е.К. – Казань: Изд-во «Вестник казанского технологического университета», т.15, №19, стр. 49-53.
3. *Глушников, В.С.* Эффективные упругие постоянные многокомпонентных композиционных материалов [Текст] / В.С. Глушников // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. третьей Всерос. научн. конф. (1-3-июня 2006, Самара). Ч. 1: «Мат. модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций». – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 46 – 47.

© **В. Я. Базотов** – д-р техн. наук, проф., зав. каф. технологии твердых химических веществ КНИТУ, femi@kstu.ru; **В. С. Глушников** – канд. физ. - мат. наук, доцент, в.н.с. каф. химии и технологии полимерных и композиционных материалов СамГТУ, fctpm@samgtu.ru.