

В. Я. Базотов, В. С. Глущенко, Э. Р. Ногачева

ЭФФЕКТИВНЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ключевые слова: матричные композиционные материалы, функция ползучести, эффективные механические характеристики.

В работе моделируются макроскопические (эффективные) функции ползучести многокомпонентных изотропных вязкоупругих композиционных материалов типа «матрица – шаровые включения».

Keywords: matrix composites creep function, effective mechanical characteristics.

In simulated macroscopic (effective) function creep multicomponent isotropic viscoelastic composites such as "matrix - ball inclusion."

Рассмотрим многокомпонентный композиционный материал, первый компонент которого является матрицей, а другие – отдельными, хаотически распределенными в матрице включениями различных материалов, имеющих шаровую форму.

Пусть локальные реологические свойства материала матрицы композиционного материала имеют вид:

$$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t J_m(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)}{3K_m}, \quad (1)$$

то есть будем считать, что объёмные деформации не обладают реологическими свойствами. Пусть также локальные свойства материалов включений (наполнителей матричного композиционного материала) не проявляют реологических свойств и имеют вид:

$$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)}{2\mu_s}, \quad \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)}{3K_s}, \quad (2)$$

Здесь $J_m(t)$ – функция ползучести (податливость) при чистом сдвиге материала матрицы; μ_s , K_m и K_s – сдвиговые и объёмные модули упругости компонентов композиционного материала; индексы m , s соответствуют материалам матрицы и включений соответственно $s = (1, 2, \dots, n)$; $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ – компоненты тензора напряжений и деформаций;

$$s_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}(\mathbf{r}, t),$$

$e_{ij}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t)$ – девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформации; δ_{ij} – символ Кронекера; t – время; $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

Функцию ползучести материала матрицы $J_m(t)$ можно определить по экспериментальным кривым ползучести, полученным из опытов на чистый сдвиг ($\sigma_{12}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{12}(\mathbf{r}, 0) = \sigma_{12}^0 = const$) [1]:

$$J_m(t) = \frac{\varepsilon_{12}(t)}{\sigma_{12}^0}, \quad (3)$$

Функцию ползучести $J_m(t)$ будем искать в виде конечной суммы экспоненциальных функций:

$$J_m(t) = \sum_{k=1}^K A_k^m \exp(-\lambda_k^m t), \quad (4)$$

где постоянные A_k^m , λ_k^m определяются аппроксимацией соответствующих экспериментальных кривых ползучести.

Применим к (1), (2), (4) преобразование Лапласа. Тогда в пространстве изображений получим определяющие соотношения упругого деформирования компонентов композиционного материала:

$$\bar{s}_{ij}(\mathbf{r}, p) = 2\bar{\mu}_m(p) \bar{e}_{ij}(\mathbf{r}, p) \quad \bar{\sigma}_{kk}(\mathbf{r}) = 3\bar{K}_m \bar{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

$$\bar{s}_{ij}(\mathbf{r}) = 2\bar{\mu}_s \bar{e}_{ij}(\mathbf{r}), \quad \bar{\sigma}_{kk}(\mathbf{r}) = 3\bar{K}_s \bar{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где p – параметр преобразования Лапласа,

$$2\bar{\mu}_m(p) = \frac{1}{\bar{J}_m(p)}, \quad \bar{J}_m(p) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k^m}{\lambda_k^m + p}, \quad \bar{K}_m = K_m,$$

$$\bar{\mu}_s = \mu_s, \quad \bar{K}_s = K_s.$$

Используя соотношения для определения эффективных модулей упругости матричного композиционного материала с шаровыми включениями [2, 3], получим:

$$\bar{\mu}^*(p) = \bar{\mu}_m(p) + \frac{\sum_{s=1}^n (\bar{\mu}_s - \bar{\mu}_m(p)) c_s \alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s},$$

$$\bar{K}^*(p) = \bar{K}_m + \frac{\sum_{s=1}^n (\bar{K}_s - \bar{K}_m) c_s \gamma_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s}, \quad (7)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{1 + \frac{6}{5} \frac{\bar{K}_m + 2\bar{\mu}_m(p)}{3\bar{K}_m + 4\bar{\mu}_m(p)} \frac{(\bar{\mu}_s - \bar{\mu}_m(p))}{\bar{\mu}_m(p)}},$$

$$\gamma_s = \frac{1}{1 + \frac{3(\bar{K}_s - \bar{K}_m)}{3\bar{K}_m + 4\bar{\mu}_m(p)}}. \quad (8)$$

Здесь звездочкой обозначены эффективные (макроскопические) величины.

В пространстве изображений эффективный

закон деформирования композиционного материала запишется в виде:

$$\begin{aligned}\langle \bar{s}_{ij}(\mathbf{r}, p) \rangle &= 2\bar{\mu}^*(p) \langle \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, p) \rangle, \\ \langle \bar{\sigma}_{kk}(\mathbf{r}, p) \rangle &= 3\bar{K}^*(p) \langle \bar{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{r}, p) \rangle,\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь угловыми скобками обозначены средние по объёму композиционного материала значения величин.

Применяя к этим соотношениям операцию обращения при помощи стандартных методов, окончательно найдём макроскопический закон ползучести:

$$\begin{aligned}\langle e_{ij}(t) \rangle &= \int_0^t J^*(t-\tau) d\langle s_{ij}(\tau) \rangle, \\ \langle \varepsilon_{kk}(t) \rangle &= \int_0^t U^*(t-\tau) d\langle \sigma_{kk}(\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь функции ползучести $J^*(t)$, $U^*(t)$ (при чистом сдвиге и объёмные) получены обращением величин: $\bar{J}^*(p) = \frac{1}{2\bar{\mu}^*(p)}$, $\bar{U}^*(p) = \frac{1}{3\bar{K}^*(p)}$.

Литература

1. Москвитин, В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твёрдом топливе) [Текст] / В.В. Москвитин. – М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 328 с.
2. Сараев, Л.А. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой [Текст] / Л.А. Сараев, В.С. Глушников. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2004. — 164 с.
3. Сергеева, Е.А. Прочностные характеристики композиционных материалов на основе плазмоактивированных сверхвысокомолекулярных полиэтиленовых волокон / Сергеева Е.А., Ибатуллина А.Р., Брысаев А.С. // Вестник Казанского технологического университета. 2012. т.15, №18, С. 133-136.
4. Кадыйров, А.И. Математическая модель стационарного теплообмена и гидродинамики при ламинарном течении вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока / Кадыйров А.И., Вачагина Е.К. // Вестник Казанского технологического университета. 2012. т.15, №19, С. 49-53.
5. Глушников, В.С. Эффективные упругие постоянные многокомпонентных композиционных материалов [Текст] / В.С. Глушников // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. третьей Всерос. научн. конф. (1-3-июня 2006, Самара). Ч. 1: «Мат. модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций». – Самара: СамГТУ, 2006. – С. 46 – 47.