

А. И. Мушгари

## РАВНОВЕСИЕ НЕЗАКРЕПЛЕННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ НА ШЕРОХОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Ключевые слова: трение, условия равновесия, однородная пластина.

Решена задача о равновесии круглой пластины на горизонтальной шероховатой плоскости. Рассмотрен общий случай, когда к пластине прикладывается плоская система сил с равнодействующей, линия действия которой произвольна. Полученная система уравнений решается численно.

Keywords: friction, equilibrium conditions, homogenous plate.

The problem of equilibrium of the circular plate on horizontal rough plane is decided. The general case, when the system of forces has a resultant force with arbitrary line of action, is considered. The received system of equations is solved numerically.

Общие подходы к изучению равновесия твердых тел под действием сил сухого трения изложены в [1]. Частная задача о равновесии стержня на шероховатой плоскости решена в [2]. Случай закрепленной круглой пластины с отверстием исследовался в [3]. Дополнительное влияние механических характеристик материала рассматривалось в [4]. Однако пока не исследованным остается вопрос о равновесии незакрепленной пластины на шероховатой плоскости в самом общем случае, когда линия действия равнодействующей силы проходит не через центр пластины.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Однородная пластина в форме круглого диска лежит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом сухого трения  $f$ . Пусть приложенные к диску внешние силы имеют равнодействующую, направленную в плоскости диска и равную по величине  $Q = k \cdot P$ , где  $P$  – вес диска,  $k$  – коэффициент. Расстояние от центра диска  $C$  до линии действия этой силы равно  $CL = \gamma \cdot R$ , где  $R$  – радиус диска. Требуется определить максимальное значение  $k$ , при котором диск может находиться в равновесии.

Приведем систему сил трения, действующих на диск, к главному вектору  $\bar{R}_{mp}$  и главному моменту  $M_{mp,L}$  относительно точки  $L$ . Из условия  $\sum_i M_L(\bar{F}_i) = Q \cdot 0 + R_{mp} \cdot 0 + M_{mp,L} = 0$  следует, что главный момент  $M_{mp,L} = 0$ . (Таким образом,  $\bar{R}_{mp}$  является равнодействующей системы сил трения.)

При выходе из равновесия диск начнет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра вращения  $K$ . Картина распределения  $d\bar{F}_{mp}$  при мгновенном вращении вокруг точки  $K$  такова, что проекции сил  $d\bar{F}_{mp}$  на прямую  $KC$  на малых площадках  $dS_{(1)}$  и  $dS_{(2)}$ , симметричных относительно  $KC$ , взаимно сокращаются:  $(d\bar{F}_{mp(1)} + d\bar{F}_{mp(2)})_{KC} = 0$ . Поскольку

$\bar{R}_{mp} = \iint_S d\bar{F}_{mp}$ , то и проекция  $(\bar{R}_{mp})_{KC} = 0$ . Поэтому  $\bar{R}_{mp} \perp KC$ . С другой стороны,  $\bar{R}_{mp} = -\bar{Q}$ , то есть  $\bar{R}_{mp} \perp CL$ . Значит, точка  $K$  лежит на прямой  $CL$  (рисунок 1).

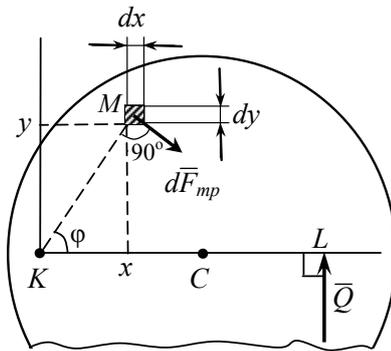


Рис. 1 – Элементарные силы трения на малых участках пластины

Обозначим  $\lambda = \frac{KC}{R}$ . Значение  $\lambda$  ищем таким, чтобы удовлетворялось условие  $M_{mp,L} = 0$ , то есть

$$\iint_S M_L(d\bar{F}_{mp}) = 0, \quad (1)$$

где силы трения  $d\bar{F}_{mp}$  на малых площадках  $dS$  направлены против возможных перемещений при возможном вращении диска под действием  $\bar{Q}$ , то есть перпендикулярно отрезкам  $KM$ .

Выберем начало координат в точке  $K$ . По теореме Вариньона:

$$M_L(d\bar{F}_{mp}) = -dF_{mp} \sin \varphi \cdot y + dF_{mp} \cos \varphi \cdot (KL - x). \quad (2)$$

Здесь  $dF_{mp} = f dN$ . Полагаем, что давление пластины на опорную плоскость распределено равномерно по площади. Тогда нормальная реакция  $dN$  опреде-

ляется из пропорции:  $\frac{dN}{N} = \frac{dS}{\pi R^2}$ . Здесь

$dS = dx dy$ . Из уравнения равновесия  $\sum_i F_{iz} = 0$ :

$N = P$ . Тогда

$$dF_{mp} = f dN = \frac{fP}{\pi R^2} dx dy. \quad (3)$$

$$KL = KC + CL = (\lambda + \gamma)R,$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4)$$

Подставим (2), (3), (4) в (1). При этом, так как  $R$  не задан, удобно перейти к безразмерным координатам:

$$x_1 = \frac{x}{R}, \quad y_1 = \frac{y}{R}. \quad (5)$$

После сокращения коэффициента получим:

$$\iint_{S_1} \frac{-y_1^2 + (\lambda + \gamma - x_1)x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} dx_1 dy_1 = 0, \quad (6)$$

где область интегрирования  $S_1$  задана соотношением  $(x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 \leq 1$ .

Соотношение (6) представляет собой нелинейное уравнение вида  $f(\lambda) = 0$ . Как выясняется из анализа интеграла в (6) либо из численного эксперимента, функция  $f(\lambda)$  монотонно возрастает и уравнение (6) имеет единственное решение.

Заметим, что аналитическое интегрирование в (6) было бы весьма громоздко, особенно с учетом того, что область интегрирования зависит от  $\lambda$ . Даже если произвести такое интегрирование, то получившееся нелинейное уравнение относительно  $\lambda$  можно было бы решить лишь численно.

Поэтому удобнее решить уравнение (6) полностью численно, применив, например, метод деления отрезка пополам. При этом численно интегрировать удобнее не по кругу, а по квадрату. Для этого интеграл в (6) удобно представить в виде

$$I = \iint_{S_{ке}} F(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

где область интегрирования  $S_{ке}$  определяется соотношениями:  $-1 + \lambda \leq x_1 \leq 1 + \lambda$ ,  $-1 \leq y_1 \leq 1$ , а подынтегральная функция:

$$F(x_1, y_1) = \begin{cases} \frac{-y_1^2 + (\lambda + \gamma - x_1)x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, & \text{при } (x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 \leq 1; \\ 0, & \text{при } (x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 > 1. \end{cases}$$

Для вычисления интеграла достаточно использовать квадратурную формулу прямоугольников (для удобства записи индекс «1» опущен):

$$I \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F(x_i, y_j) \cdot h^2,$$

где  $h$  – малый шаг метода,  $h = \frac{2}{N}$  (учтено, что длина стороны квадрата равна 2),  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $y_{i+1} = y_i + h$ ; начальные узлы:  $x_1 = -1 + \lambda$ ,  $y_1 = -1$ . Для получения ответа с абсолютной погрешностью, не превышающей 0.001, достаточно выбрать, например,  $N = 300$ .

Легко выяснить, что при любых  $\gamma$  точка  $K$  находится левее  $C$ . Иначе было бы  $(\bar{R}_{mp})_y > 0$ ,  $\sum_i F_{iy} = (\bar{R}_{mp})_y + Q > 0$ , то есть не было бы равновесия.

Исследуем вопрос о том, как нужно выбрать отрезок варьирования для  $\lambda$  в методе деления отрезка пополам. Полагаем  $\gamma \geq \varepsilon > 0$ . Верхняя граница для  $\lambda$  определяется из численного эксперимента при минимальном допустимом значении  $\gamma = \varepsilon$ . Действительно, если было бы  $\gamma = 0$ , то возможное движение диска было чисто поступательным. При этом мгновенный центр вращения  $K$  устремился бы к бесконечности. Поэтому при неограниченно малых значениях  $\gamma$  задать верхнюю границу для  $\lambda$  не представлялось бы возможным. Ограничение  $\gamma \geq \varepsilon$  эту проблему снимает. В качестве примера возьмем  $\varepsilon = 0.1$ . Вначале можно искать  $\lambda$ , например, на отрезке  $\lambda \in [0, 100]$ . Выясняется, что при  $\gamma = 0.1$  получаем  $\lambda = 2.582$ , а при  $\gamma = 1$  будет  $\lambda = 0.547$ , причем функция  $\lambda(\gamma)$  монотонно убывает. Поэтому для ускорения счета можно оставить отрезок  $\lambda \in [0, 3]$ .

Переходим ко второму этапу решения задачи. При равновесии диска:

$$\sum_i M_K(F_i) = M_{mp,K} + Q \cdot KL = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$M_{mp,K} = \iint_S M_K(d\bar{F}_{mp}) = - \iint_S (dF_{mp} \cdot h).$$

Так как  $h = MK = \sqrt{x^2 + y^2}$ , с учетом (3) получим:

$$M_{mp,K} = - \frac{fP}{\pi R^2} \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

При переходе к безразмерным координатам (5):

$$M_{mp,K} = - \frac{fPR}{\pi} \iint_{S_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} dx_1 dy_1 = - \frac{fPR}{\pi} I, \quad (8)$$

где область интегрирования и методика интегрирования интеграла  $I = \iint_{S_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} dx_1 dy_1$  те же, что и для интеграла в (6).

Теперь учтем в (7) соотношения

$KL = (\lambda + \gamma)R$ ,  $Q = kP$  и (8):

$$- \frac{fPR}{\pi} I + k P (\lambda + \gamma) R = 0,$$

откуда после сокращения  $P, R$  получим окончательно:

$$k = \frac{f l}{\pi(\lambda + \gamma)}. \quad (9)$$

Коэффициент  $f$  входит в (9) как множитель. Поэтому для анализа результатов достаточно выбрать какое-то фиксированное значение  $f$ . Далее результаты приведены для  $f = 0.5$ . Параметр  $\gamma$  сложным образом влияет на значение интеграла  $I$ , а также входит в выражение в знаменателе в (9).

В предельном случае  $\gamma = 0$ , то есть при приложении силы  $Q$  к центру диска, при выходе из равновесия движение, очевидно, будет поступательным, то есть  $\lambda = \infty$ . При этом  $F_{mp} = fN = Q = kN$ , откуда  $k = f$ . Этому соответствует численное решение задачи: при малом  $\gamma = 0.001$  получаем значения  $\lambda = 250.3$  (радиус возможного вращения диска велик) и  $k = 0.4999 \approx f$ .

При увеличении значения  $\gamma$  получим следующие результаты. При  $\gamma = 0.2$ :  $\lambda = 1.408$  и  $k = 0.466$ . При  $\gamma = 0.5$ :  $\lambda = 0.827$  и  $k = 0.374$ . При  $\gamma = 0.8$ :  $\lambda = 0.635$  и  $k = 0.301$ .

При  $\gamma = 1$  при приложении силы  $Q$  к краю диска по касательной получаем  $\lambda = 0.546$  (центр возможного вращения диска находится внутри круга) и  $k = 0.263$ . Таким образом, при увеличении  $\gamma$

от 0 до 1 величина  $k$  монотонно уменьшается от значения, равного  $f$ , до значения, равного  $0.526f$ .

При дальнейшем увеличении  $\gamma$  (при  $\gamma > 1$  линия действия сила  $Q$  лежит вне пластины) величина  $k$  будет дальше монотонно убывать, стремясь к нулю при  $\gamma \rightarrow \infty$ . (Например, при  $\gamma = 2$ :  $k = 0.155$ , а при  $\gamma = 10$ :  $k = 0.033$ .)

Таким образом, задача о равновесии круглой пластины на шероховатой плоскости имеет однозначное решение, которое находится численно в два этапа. На первом этапе определяется положение центра мгновенного вращения пластины. На втором этапе находится значение искомой силы, соответствующее предельному равновесию пластины.

### Литература

1. Иванов А. П. Основы теории систем с трением. Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2011. 302 с.
2. Черноусько Ф.Л., Смышляев А.С. Условия равновесия стержня на шероховатой плоскости. // Прикладная математика и механика, **66**, 2, 177-182 (2002)
3. Тимербаев Р.М., Хайруллин Ф.С., Хакимов Р.Г. Задача о деформировании круглой пластины с отверстием. // Вестник Казанского технол. ун-та, **16**, 6, 179-182 (2013)
4. Убайдуллоев М.Н., Серазутдинов М.Н. Влияние механических характеристик материала на эффективность усиления нагруженных конструкций. // Вестник Казанского технол. ун-та, **16**, 2, 160-163 (2013)