

УДК 519.673

В. Х. Федотов, Н. И. Кольцов

МОДЕЛИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Ключевые слова: странные аттракторы, модели Лоренца, Рикитаке и Росслера, линейные инварианты.

Проведено обобщение известных моделей Лоренца, Рикитаке и Росслера, способных описывать сложную динамику с учетом инвариантных линейных преобразований координат.

Keywords: strange attractors, Lorenz, Rikitake and Rossler models, linear invariants.

A generalization of the known models Lorenz, Rikitake and Roessler able to describe the complex dynamics with the invariant linear coordinate transformations performed.

Введение

Из теории динамических систем известно, что предельное поведение системы двух дифференциальных уравнений может быть только стационарным или периодическим (автоколебательным) [1]. В работах [2-4] исследованы модели, описывающие автоколебания в каталитических реакциях системами двух дифференциальных уравнений. В трехмерных системах возможны и более сложные, непериодические, предельные движения (странные аттракторы, хаос, турбулентность). Одной из наиболее известных причин возникновения странных аттракторов считается бесконечная последовательность бифуркаций удвоений периода [5]. После прохождения бифуркационного значения параметра все более усложняющиеся устойчивые периодические движения переходят в новое качество – хаотических колебаний. Странные аттракторы возникают при изменении параметров простых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в физике, химии, биологии и др. [6]. Наиболее известными хаотическими системами, имеющими физический смысл, являются модель Лоренца для прогноза погоды (упрощение гидродинамических уравнений Навье-Стокса)

$$x' = -\alpha x + \alpha y, \quad y' = \beta x - xz - y, \quad z' = xy - \gamma z$$

при $\alpha=10, \beta>28, \gamma=8/3$, (1)

магнетогидродинамическая модель Земли (динамо Рикитаке) [7]

$$x' = -\mu x + z y, \quad y' = -\mu y - \alpha x + x z, \quad z' = 1 - x y$$

при $\mu=1, \alpha=\mu(K^2 - K^{-2}), K=2$ (2)

и модель биохимической реакции Росслера [8]

$$x' = -(y + z), \quad y' = x + a y, \quad z' = b + z(x - c)$$

при $a=0.2, b=0.2, c \geq 4.2$. (3)

Вопросы моделирования сложной динамики применительно к практическим целям затрагиваются в работах [9-10]. При этом, в целом, как отмечают редакторы сборника [6], математическая теория странных аттракторов не разработана. Целью данной работы является обобщение моделей (1)-(3), способных описывать сложную динамику, с учетом инвариантных линейных преобразований координат.

Результаты и их обсуждение

Исследуем и классифицируем хаотические системы, инвариантные (1)-(3) относительно линей-

ных преобразований вида (новые переменные выделены жирным шрифтом):

$$x = a_1 \mathbf{x} + b_1, \quad y = a_2 \mathbf{y} + b_2, \quad z = a_3 \mathbf{z} + b_3,$$

где $a_1 a_2 a_3 \neq 0$. (4)

Инварианты модели Лоренца. Обобщенная модель Лоренца, инвариантная относительно преобразований (4), запишется

$$\begin{aligned} x' &= \alpha [a_2 \mathbf{y}/a_1 - x + (b_2 - b_1)/a_1], \\ y' &= a_1 (\beta - b_3) x/a_2 - a_1 a_3 x z/a_2 - y - b_1 a_3 z/a_2 + \\ &\quad + \beta b_1/a_2 - b_1 b_3/a_2 - b_2/a_2, \\ z' &= a_1 a_2 x y/a_3 - \gamma z + b_1 a_2 y/a_3 + a_1 b_2 x/a_3 + \\ &\quad + b_1 b_2/a_3 - \gamma b_3/a_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Все модификации модели (5), аналогично классической модели Лоренца, имеют «центральное» стационарное состояние $x^\infty = -b_1/a_1, y^\infty = -b_2/a_2, z^\infty = -b_3/a_3$ и при $\beta > 1$ еще два «периферийных» $x^\infty = a_2 y/a_1 + (b_2 - b_1)/a_1, y^\infty = [-b_2 \pm \sqrt{\gamma((\beta - 1))}]/a_2, z^\infty = (\beta - b_3 - 1)/a_3$, которые при $\beta = 1$ сливаются с центральным (бифуркация рождения множественности). Анализ показал, что при $a_1 > -(1 + \gamma)/\alpha$ центральный стационар неустойчив. Если при этом существуют и неустойчивы два периферийных стационара, то возникает бифуркация рождения сложнопериодического (апериодического) режима (хаос).

Модель 5.1. При $b_2 = b_3 = 0$ система (5) запишется: 5.1) $x' = \alpha [a_2 y/a_1 - x - b_1/a_1], y' = a_1 \beta x/a_2 - a_1 a_3 x z/a_2 - y - b_1 a_3 z/a_2 + \beta b_1/a_2, z' = a_1 a_2 x y/a_3 - \gamma z + b_1 a_2 y/a_3$. Стационарные состояния – центральное $x^\infty = -b_1/a_1, y^\infty = 0, z^\infty = 0$ и при $\beta > 1, \alpha = 10, \gamma = 8/3$ – и два периферийных $x^\infty = a_2 y/a_1 - b_1/a_1, y^\infty = \pm 6\sqrt{2}/a_2, z^\infty = 27/a_3$. При $a_1 > -(1 + \gamma)/\alpha = -11/30$ и $\beta > 24$ все стационарные состояния неустойчивы. При этих значениях параметров и вблизи них существует область неустойчивости и хаос, рис. 1.

Инварианты модели Рикитаке. Обобщенная модель Рикитаке (2) с учетом (4) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= -\mu x + a_2 a_3 z y/a_1 + (a_2 b_3 y + \\ &\quad + a_3 b_2 z + b_2 b_3 - \mu b_1)/a_1, \\ y' &= -\mu y - \alpha a_1 x/a_2 + a_1 a_3 x z/a_2 + \\ &\quad + (a_1 b_3 x + a_3 b_1 z + b_1 b_3 - \mu b_2 - \alpha b_1)/a_2, \\ z' &= 1/a_3 - a_1 a_2 x y/a_3 - a_1 b_2 x/a_3 - b_1 a_2 y/a_3 - b_1 b_2/a_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Классическая модель Рикитаке имеет два действительных $y^\infty = 1/x^\infty, x^\infty = \pm \sqrt{[\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 4\mu^2)}]}/2\mu, z^\infty = [\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 4\mu^2)}]/2$ и два комплексно-сопряженных

стационарных состояния $\mathbf{x}^\infty = \pm\{\sqrt{[\alpha - \sqrt{(\alpha^2 + 4\mu^2)}/2\mu]}\}i$, где $\alpha \equiv \mu(K^2 - K^2)$, i – мнимая единица. Все модификации (6), аналогично модели Рикитакэ, имеют два действительных стационарных состояния. Если все они неустойчивы, то возникает бифуркация рождения сложнопериодического режима (хаос).

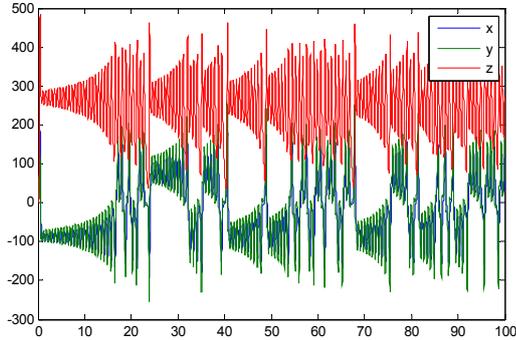


Рис. 1 – Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 5.1 при $a_1=a_2=a_3=0.1$, $b_1=0.5$, $b_2=b_3=0$ и $\alpha=10$, $\beta=25$, $\gamma=8/3$

Модель 6.1. При $b_2=b_3=0$ система (6) запишется $x' = -\mu x + a_2 a_3 z y / a_1 - \mu b_1 / a_1$, $y' = -\mu y - \alpha a_1 x / a_2 + a_1 a_3 x z / a_2 + (a_3 b_1 z - \alpha b_1) / a_2$, $z' = 1/a_3 - a_1 a_2 x y / a_3 - b_1 a_2 y / a_3$. Два действительных стационарных состояния $y^\infty = 1/x^\infty$, $x^\infty = (\pm\{\sqrt{[\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 4\mu^2)}/2\mu]}\} - b_1) / a_1$, $z^\infty = [\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 4\mu^2)}/2\mu]$ неустойчивы, например, при $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 1$. Вблизи этих значений параметров существует область неустойчивости и хаотический режим, рис. 2.

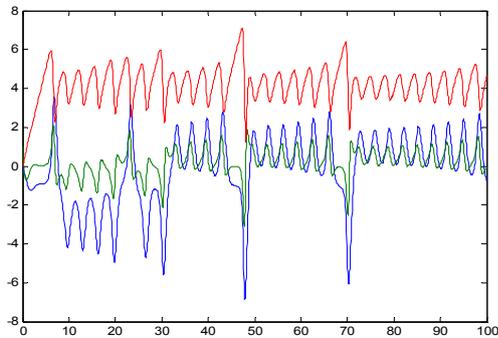


Рис. 2 – Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 6.1 при $\mu=1$, $K=2$ и $b_1=1$, $b_2=b_3=0$

Инварианты модели Росслера. Обобщенная модель Росслера (3) с учетом (4) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= -a_2 y / a_1 - a_3 z / a_1 - (b_2 + b_3) / a_1, \\ y' &= a_1 x / a_2 + a y + (b_1 + a b_2) / a_2, \\ z' &= (b + b_1 b_3 - c b_3) / a_3 + a_1 x z + a_1 b_3 x / a_3 + (b_1 - c) z. \end{aligned} \quad (7)$$

Классическая модель Росслера при $D = c^2 - 4ab > 0$ имеет два действительных стационарных состояния $y^\infty = -z^\infty$, $x^\infty = a z^\infty$, $z^\infty = (c \pm \sqrt{D}) / (2a)$, которые сливаются в одно при $D = 0$ и становятся комплексносопряженными при $D < 0$. Все модификации (7), аналогично модели Росслера, имеют два действительных стационарных состояния. Если все они неус-

тойчивы, то возникает бифуркация рождения сложнопериодического режима (хаос).

Модель 7.1. При $b_2=b_3=0$ система (7) запишется $x' = -a_2 y / a_1 - a_3 z / a_1$, $y' = a_1 x / a_2 + a y + b_1 / a_2$, $z' = b / a_3 + a_1 x z + (b_1 - c) z$. Два действительных стационарных состояния $y^\infty = -a_3 z^\infty / a_2$, $x^\infty = (a a_3 z^\infty - b_1) / a_1$, $z^\infty = (c \pm \sqrt{D}) / (2a a_3)$ неустойчивы, например, при $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 1$. Вблизи этих значений параметров существует область неустойчивости и хаос, рис. 3.

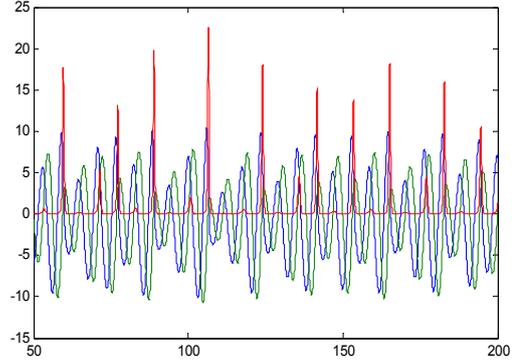


Рис. 3 – Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 7.1 при $a=0.2$, $b=0.2$, $c=4.2$, $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 1$ и $b_2 = b_3 = 0$

Классификация инвариантных моделей хаоса приведена в табл. 1. Варьирование ненулевых значений дает различные инварианты моделей (1)-(3). Например, строке 8 при $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ соответствуют классические модели Лоренца, Рикитакэ и Росслера. При $a_1 = a_2 = a_3 \neq 1$ – модифицированные модели (1)-(3) и т.д. При $a_1 = a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ (т.е. для преобразования $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$) – модели, инвариантные по свойствам и форме моделям (1)-(3).

Таблица 1 – Модели хаоса, инвариантные относительно преобразований (4)

№	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	Примечание
1	$\neq 0$	Обобщенные модели (5)-(7)					
2	$\neq 0$	0					
3	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	
4	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	Модели 5.1, 6.1 и 7.1
5	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	
6	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	
7	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	
8	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	Классические модели (1)-(3)

Отметим, что модели (5)-(7) и данные табл.1 далеко не исчерпывают всех возможных модификаций моделей хаоса. На основе более сложных (билинейных, трилинейных) преобразований, можно построить бесконечно много других модификаций моделей хаоса, отличных от приведенных в табл. 1. Рассмотрим трилинейные преобразования общего вида (новые переменные выделены жирным шрифтом):

$$x = a_1 \mathbf{x} + b_1 \mathbf{y} + c_1 \mathbf{z} + d_1, \quad y = a_2 \mathbf{x} + b_2 \mathbf{y} + c_2 \mathbf{z} + d_2,$$

$$z = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \quad (8)$$

где определитель из коэффициентов $\Delta \equiv \det(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3) = a_1c_2b_3 + a_2b_1c_3 + b_2a_3c_1 - a_1b_2c_3 - a_2c_1b_3 - c_2a_3b_1 \neq 0$. Очевидно, что монолинейные преобразования (4) являются частным случаем (8). Преобразуем модели хаоса с учетом преобразований (8). Например, классическая модель Лоренца (4) после преобразований (8) примет вид

$$\begin{aligned} a_1x' + b_1y' + c_1z' &\equiv \alpha[(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)z + (d_2 - d_1)] \equiv f_1, \\ a_2x' + b_2y' + c_2z' &\equiv (\beta a_1 - a_2)x + (\beta b_1 - b_2)y + (\beta c_1 - c_2)z + (\beta d_1 - d_2) - \\ &-(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) \equiv f_2, \quad (9) \\ a_3x' + b_3y' + c_3z' &\equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) - \gamma(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) \equiv f_3. \end{aligned}$$

Разрешая систему (9), линейную относительно производных по новым переменным, получим обобщенную модель Лоренца, инвариантную относительно преобразований (8)

$$x' = \Delta_x / \Delta, \quad y' = \Delta_y / \Delta, \quad z' = \Delta_z / \Delta, \quad (10)$$

где $\Delta_x \equiv \det(f_1, b_1, c_1; f_2, b_2, c_2; f_3, b_3, c_3) = -(-b_1c_3d_2 + c_1d_2b_3 - c_1b_2\gamma d_3 - c_1b_2^2b_1y^2 + b_1\gamma b_3yc_2 - \alpha b_2^2yc_2b_3 + \alpha b_2^2yc_3 - b_1^2a_3c_3yx - b_1^2c_3y^2b_3 - b_1^2c_3yd_3 + b_1^2y^2b_2c_2 + b_1^2ya_2xc_2 - b_1^2c_3^2yz - b_1^2c_3\beta y + b_1^2yc_2^2z + b_1^2yd_2c_2 - b_1c_3b_2y - b_1c_3^2d_1z - b_1a_1c_3\beta x - b_1c_3d_1d_3 - b_1c_3c_2z - b_1c_3\beta d_1 - b_1c_3a_2x - b_1a_1c_3^2xz - b_1a_1c_3xd_3 + b_1c_1z^2c_2 + b_1\gamma d_3c_2 + b_1a_1xc_2^2z + b_1d_1d_2c_2 + b_1d_1c_2^2z + b_1a_1x^2a_2c_2 - b_1c_3c_1zd_3 - b_1c_3\beta c_1z - b_1c_3d_1b_3y + b_1c_1zd_2c_2 + b_1d_1a_2xc_2 - b_1ya_2xb_2c_1 + b_1\gamma c_3zc_2 + b_1a_1xb_2yc_2 - b_1a_1b_3c_3yx + b_1a_3b_3c_1yx - b_1a_3c_3d_1x + b_1a_3\gamma xc_2 + \beta c_1^2zb_3 + c_1^2z^2c_3b_3 + c_1^2zb_3^2y + c_1^2za_3xb_3 - b_2^2c_1^2zy - b_2c_1^2zd_2 - b_2c_1^2z^2c_2 - b_2c_1^2za_2x - c_1b_2b_1yd_2 + c_1\beta b_1yb_3 + c_1d_1a_3xb_3 - c_1b_2\gamma c_3z + c_1b_1y^2b_3^2 - c_1b_2^2d_1y + c_1b_2yb_3 + c_1d_1b_3^2y - c_1b_2d_1d_2 + c_1a_1x^2a_3b_3 + c_1a_1xb_3^2y - c_1a_1b_2^2xy + c_1a_1xd_3b_3 + c_1a_1\beta xb_3 - c_1a_1b_2xd_2 - c_1a_1b_2x^2a_2 - c_1b_2d_1c_2z - c_1b_2\gamma a_3x - c_1b_2\gamma b_3y - c_1b_2d_1a_2x + c_1a_2b_1xc_2z - c_1xc_3za_3b_1 + c_1b_1yd_3b_3 - c_1a_1b_2xc_2z + c_1a_1xc_3zb_3 + c_1d_1c_3zb_3 - \alpha a_2xc_2b_3 + \alpha a_2xb_2c_3 + \alpha b_1yc_2b_3 - \alpha b_1yb_2c_3 - \alpha c_2^2zb_3 + \alpha c_2zb_2c_3 - \alpha d_2c_2b_3 + \alpha d_2b_2c_3 + \alpha a_1xc_2b_3 - \alpha a_1xb_2c_3 + \alpha c_1zc_2b_3 - \alpha c_1zb_2c_3 + \alpha d_1c_2b_3 - \alpha d_1b_2c_3 + c_1a_2xb_3 + b_1a_1xd_2c_2 + c_1c_2zb_3 - b_1c_3^2c_1z^2 + b_1d_1b_2yc_2 + c_1\beta d_1b_3 - b_1a_3a_1c_3x^2 + c_1d_1d_3b_3 + c_1^2zd_3b_3), $\Delta_y \equiv \det(a_1, f_1, c_1; a_2, f_2, c_2; a_3, f_3, c_3)$, $\Delta_z \equiv \det(a_1, b_1, f_1; a_2, b_2, f_2; a_3, b_3, f_3)$. Два последних определителя не раскрыты из-за громоздких выражений. Варьируя в (10) коэффициенты $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ (так, чтобы $\Delta \neq 0$) можно получить любое число модификаций моделей хаоса, инвариантных относительно преобразований (8). Нетрудно убедиться, что при $b_1=c_1=b_2=c_2=b_3=c_3=0$ модель (10) упрощается и совпадает с (4).$

Модель 9.1. Например, при $a_1=0, a_2=0, a_3=1, b_1=0, b_2=1, b_3=0, c_1=1, c_2=c_3=d_1=d_2=d_3=0$ получим следующую модификацию модели Лоренца: 9.1) $x' = yz - \gamma x, y' = (\beta - x)z - y, z' = \alpha(y - z)$. Эта

модификация отсутствует именно в таком виде в табл. 1 и соответствует замене переменных $x \rightarrow z, y \rightarrow y, z \rightarrow x$. Это значит, что она инвариантна классической модели Лоренца относительно преобразований (8) как по свойствам так и по форме.

Модель 9.2. При $b_1=1$ (остальные коэффициенты те же) получим более сложную модификацию модели Лоренца: 9.2) $x' = yz + y^2 - \gamma x, y' = (\beta - x)z + (\beta - x - 1)y, z' = (x - \alpha - \beta)z - (\beta - x - 1)y$. Эта модификация также отсутствует в табл. 1 и соответствует замене переменных $x \rightarrow y + z, y \rightarrow y, z \rightarrow x$. Это значит, что она инвариантна классической модели Лоренца относительно преобразований (8) только по свойствам, но не по форме, рис. 4.

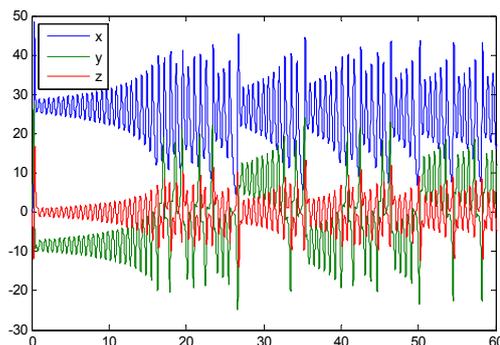


Рис. 4 – Зависимости $x(t), y(t), z(t)$ для модели 9.2 при $\alpha=10, \beta=28, \gamma=8/3, a_3=b_1=b_2=c_1=1, a_1=a_2=b_3=c_2=c_3=d_1=d_2=d_3=0$

Таким образом, нами получены все возможные линейные инварианты известных моделей хаоса, которые также могут быть использованы для описания сложного динамического поведения различных процессов и явлений природы.

Литература

1. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М., Наука, 1976, 497 с.
2. В.В. Alekseev, N.I. Koltsov, *React. Kinet. Catal. Lett.*, **19**, 1-3, 15 - 22 (1982).
3. V.Kh. Fedotov, N.I. Koltsov, V.V. Alekseev, S.L. Kiperman, *Ibid.*, **23**, 3-4, 301-306 (1983).
4. В.Х. Федотов, Б.В. Алексеев, Н.И. Кольцов, С.Л. Киперман, *Изв. вузов. Химия и хим. технол.*, **28**, 5, 120-122 (1985).
5. Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев, *Введение в теорию нелинейных колебаний*. М., Наука, 1976, 384 с.
6. *Странные аттракторы* / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. Л., Мир, 1981, 253 с.
7. Т. Рикитакэ, *Электромагнетизм и внутреннее строение Земли*. Л.: Недра, 1968. 332 с.
8. О.Е. Rossler, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **316**, 376-392 (1979).
9. О.В. Матухина, *Вестник Казан. технол. ун-та*, **16**, 2, 191-194 (2013).
10. Р.Г. Мухарлямов, О.В. Матухина *Вестник Казан. технол. ун-та*, **15**, 12, 220-225 (2012).