

Л. М. Останин

ПЕРЕПАД ДАВЛЕНИЯ ОДНОФАЗНОГО ПОТОКА В ВИХРЕВЫХ УСТРОЙСТВАХ С ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМИ ЗАВИХРИТЕЛЯМИ

Часть 1. Математическая формулировка задачи

Ключевые слова: аэродинамика, однофазный поток, гидравлическое сопротивление, вихревые контактные устройства, краевая задача, длина пути смешения.

Сформулирована краевая задача и получены аналитические формулы для расчёта окружной компоненты скорости и профиля давлений на основе уравнений Рейнольдса с использованием гипотезы Прандтля о длине пути смешения. При линейной аппроксимации радиальной скорости краевая задача решена с использованием метода Бубнова-Галёркина

Keywords: aerodynamics, single-phase stream, hydraulic resistance, vortical contact devices, regional problem, length of a way of mixture.

The regional problem is stated and analytical formulas for calculation district components of speed and a structure of pressure on the basis of Reynolds's equations with use of hypothesis Prandtlja about length of a way of mixture are received. At linear approximation of radial speed the regional problem is solved with use of method Bubnova-Galerkina.

Профиль давлений и энергетические потери в вихревом потоке в основном предопределяются окружной компонентой скорости W_ϕ . Исследованием и расчётом W_ϕ занимался ряд авторов [1-4]. Зависимость $V_\phi(r)$ обычно аппроксимируют в виде кусочно-ломаной функции, либо полагают $V_\phi \sim r^n$, где n находят экспериментально [1].

Приближенная теоретическая зависимость предложена М.А. Гольдштиком. При этом он полагал, что турбулентная вязкость γ_T пропорциональна характерным скорости V и геометрическому размеру L и, вводя аппроксимацию радиальной компоненты скорости, из двумерных уравнений Навье-Стокса получил расчётную зависимость

$$W_\phi = (\Gamma_0 / r) \cdot (1 - \exp(-Re_T \cdot r^2 / 2)) \quad (1)$$

где Γ_0 - циркуляция на границе;

$$Re_T = V \frac{L}{\nu_T} - \text{турбулентное число Рейнольдса.}$$

Однако, гипотеза постоянства турбулентной вязкости в вихревом потоке не всегда приемлема [5-8].

Математическая формулировка задачи

В качестве исходного математического аппарата воспользуемся осесимметричными уравнениями Рейнольдса [2,9] при пренебрежении молекулярной вязкостью. (Экспериментальное обоснование осесимметричности течения даётся в работе [10])

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_\phi}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_\phi}{\partial z} + \frac{W_r W_\phi}{r} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial r} \left(-c \bar{W}_z' \bar{W}_\phi' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-c \bar{W}_\phi' \bar{W}_z' \right) + \\ & + \frac{2}{r} \left(-c \bar{W}_r' \bar{W}_\phi' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c \left(\frac{\partial W_r}{\partial t} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} - \frac{W_\phi^2}{r} \right) = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-c r \bar{W}_r'^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-c \bar{W}_r' \bar{W}_z' \right) - \\ & - \frac{1}{r} \left(-c \bar{W}_\phi'^2 \right) \\ & c \left(\frac{\partial W_z}{\partial t} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-c r \bar{W}_z' \bar{W}_r' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-c \bar{W}_z'^2 \right) \\ & \frac{\partial}{\partial r} (r W_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r W_z) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Решение задачи (2) весьма трудоёмко. Это связано как с нелинейностью рассматриваемой задачи, так и с неединственностью решения. Обычно для упрощения задачи уменьшают её размерность при соответствующей аппроксимации одной или двух компонент скорости.

Обоснование сведения задачи расчёта $W_\phi(r)$ и $P(r)$ к двумерной дается в работе [1] при выводе формулы (1). При этом М.А. Гольдштик вводит линейную аппроксимацию $V(r)$, в результате чего уравнение неразрывности выполняется автоматически.

Если принять гипотезу Прандтля о длине пути смешения, то компоненты турбулентных напряжений имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} -c \bar{W}_r' \bar{W}_\phi' &= cl^2 J \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial r} - \frac{W_\phi}{r} \right), \\ -c \bar{W}_\phi'^2 &= 2cc^2 J \left(\frac{W_r}{r} \right), \end{aligned}$$

$$-c\overline{W_z}'\overline{W_r}' = cl^2 J \left(\frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{\partial W_r}{\partial z} \right),$$

где

$$J^2 = 2 \left[\left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{W_r^2}{r^2} \right] + \\ + \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial r} - \frac{W_\phi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{\partial W_r}{\partial z} \right)^2$$

- квадратичный инвариант тензора скоростей деформации;

l - масштаб турбулентности.

Здесь и далее W_ϕ , W_r , W_z - осредненные компоненты скорости.

Поскольку в вихревых устройствах

$$\text{распылительного типа } \frac{\partial W_\phi}{\partial z} \approx \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad [11],$$

рассмотрим случай [1]

$$W_z = W_r(r), W_\phi = W_\phi(r), P = P(r).$$

Для закрученных течений

$$\left| \frac{\partial W_\phi}{\partial r} - \frac{W_\phi}{r} \right| \gg \left| \frac{\partial W_z}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial W_r}{\partial r} \right|, \left| \frac{W_r}{r} \right|.$$

Поэтому

$$J \equiv \left| \frac{\partial W_\phi}{\partial r} - \frac{W_\phi}{r} \right| \quad (3)$$

Кроме того, следуя работе [12], во втором уравнении системы (2) отбросим первую и вторую компоненты тензора турбулентных напряжений ввиду их малости. Тогда из первых двух уравнений системы (2) после обезразмеривания получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left(l^2 \left| \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right| \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right) \right) + \\ + \frac{2}{r} \left| \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right| \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right) \\ c \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{V_\phi^2}{r} \right) = \\ = \frac{\partial P}{\partial r} + 2l^2 c \left| \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right| \frac{V_r}{r^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Из результатов работы [8] следует, что масштаб турбулентности возрастает пропорционально расстоянию от точек с нулевой скоростью.

Поскольку в центре $V_r = V_\phi = 0$, то согласно [8]:

$$l^2 = Cr^2, C > 0. \quad (5)$$

Если V_r известна, то первое уравнение системы (4) может быть решено независимо от второго. Подставляя l в (4) с учётом граничных условий получаем следующую стационарную краевую задачу:

$$V_r \left(\frac{dV_\phi}{dr} + \frac{V_\phi}{r} \right) = C \frac{d}{dr} r^2 \left| \frac{dV_\phi}{dr} - \frac{V_\phi}{r} \right| \left(\frac{dV_\phi}{dr} - \frac{V_\phi}{r} \right) + \\ + \frac{2}{r} \left| \frac{dV_\phi}{dr} - \frac{V_\phi}{r} \right| \left(\frac{dV_\phi}{dr} - \frac{V_\phi}{r} \right) \quad (6)$$

$$V_\phi(0) = 0, \quad V_\phi(1) = 1.$$

Задачу (6) будем решать методом Бубнова-Галёркина [12]. Преимуществом метода Бубнова-Галёркина перед конечно-разностными является то, что в результате его применения мы получим готовую формулу, приемлемую для инженерных расчётов. Кроме того, в результате реализации метода конечных разностей может получиться решение не обязательно устойчивое, а метод Бубнова-Галёркина позволяет проводить линейный анализ устойчивости решения. Приведём граничные условия к однородным введением новой функции

$$V = V_\phi - r. \quad (7)$$

Задача (6) приводится к виду

$$V \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) - C \left(\frac{d}{dr} r^2 \left| \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right| \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \right) + \\ + \frac{2}{r} \left| \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right| \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) = -2V_r \\ V(0) = V(1) = 0. \quad (8)$$

С учётом правил дифференцирования обобщенных функций [14] получаем:

$$\begin{aligned} 2V_r + V_r \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) = C \left(\frac{d}{dr} S(r) r^2 \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} S(r) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right)^2 \right) = \\ = C \left(D(r) r^2 \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right)^2 + 2r S(r) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2r^2 c(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{r} S(r) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right)^2 \right) = \\ = C \left(D(r) r^2 \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right)^2 + 2S(r) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \left(r \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} - r \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

где $S(r) = \text{Sign}\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)$; $D(r) = S'(r)$.

Отсюда

$$V(r)\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right) - C \left(D(r)r^2\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)^2 + 2r^2S(r)\frac{d^2V}{dr^2}\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right) + \frac{2}{r}S(r)\left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}\right)^2 \right) = 0 \quad (9)$$

$$V(0) = V(1) = 0.$$

Выводы

Сформулирована краевая задача для расчёта тангенциальной компоненты скорости потока $V_\varphi(r)$ и профиля давлений $P(r)$ на основе уравнений Рейнольдса с использованием гипотезы Прандтля о длине пути смешения.

Литература

1. Гольдштик, М. А. Вихревые потоки / М. А. Гольдштик. - Новосибирск. : Наука, 1996. - 357 с.
2. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. - М. : Наука, 1973. - 847 с.
3. Овчинников, А. А. Определение радиуса вихря в вихревых газовых камерах / А. А. Овчинников, Н. А.

Николаев. // Труды КХТИ им.С.М.Кирова. - Казань, 1973. - Вып.1. - С. 9- 14.

4. Шамсутдинов, А. М. Исследование турбулентного потока несжимаемой жидкости три плоском осевом стоке / А. М. Шамсутдинов, В. Е. Паймикин. // Сб. Трудов ИТ СО АН СССР. - Новосибирск, 1982. - С. 9-13.
5. Непомнящий, Е. А. Закрученные течения / Е. А. Непомнящий, А. М. Кутепов. // ТОХТ. - 1976. - Т.13. - № 1. - С. 86-89.
6. Устименко, Б. П. Процессы переноса во вращающихся течениях / Б. П. Устименко. - Алма - Ата, Наука. 1977. - 195 с.
7. Устименко, Б. П. Турбулентная структура потока в циклонной камере / Б. П. Устименко, М. А. Бухман. // Теплоэнергетика. 1968. №2. - С. 79-82.
8. Рочино, Д. Несжимаемый турбулентный закрученный поток в неподвижных трубах / Д. Рочино, М. Лэвэн. // Трамерик. об-ва ин-в мех-в. Сер. Е, 1969. - № 2. - С.7-16.
9. Гольдштейн, С. Е. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости / С. Е. Гольдштейн. - М. : Изд. иностр. лит-ры, 1968. - Т.1.
10. Щукин, В. К. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах / В. К. Щукин, А. А. Халатов. - Машиностроение, 1982. - 200 с.
11. Останин, Л. М. Гидродинамика газожидкостного потока в вихревых распылительных устройствах / Л. М. Останин. // Вестник Казанского технол. ун-та. - Казань, 2011. - №4. - С. 177 – 181.
12. Аэродинамика закрученной струи / А. Б. Ахмедов. - М. : Энергия, 1977. - 178 с.
13. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. - М. : Мир, 1985. - 584 с.
14. Кеч, В. Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. - М. : Мир, 1978. - 518 с.