УДК 532.5.12.4: 66.02.03

Л. М. Останин

ПЕРЕПАД ДАВЛЕНИЯ ОДНОФАЗНОГО ПОТОКА В ВИХРЕВЫХ УСТРОЙСТВАХ С ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМИ ЗАВИХРИТЕЛЯМИ

Часть 2. Решение задачи

Ключевые слова: аэродинамика, однофазный поток, гидравлическое сопротивление, вихревые контактные устройства, краевая задача, длина пути смешения.

Сформулирована краевая задача и получены аналитические формулы для расчёта окружной компоненты скорости и профиля давлений на основе уравнений Рейнольдса с использованием гипотезы Прандтля о длине пути смешения. При линейной аппроксимации радиальной скорости краевая задача решена с использованием метода Бубнова-Галёркина

Keywords: aerodynamics, single-phase stream, hydraulic resistance, vortical contact devices, regional problem, length of a way of mixture.

The regional problem is stated and analytical formulas for calculation district components of speed and a structure of pressure on the basis of Reynolds's equations with use of hypothesis Prandtlja about length of a way of mixture are received. At linear approximation of radial speed the regional problem is solved with use of method Bubnova-Galerkina.

Решение задачи

В гильбертовом пространстве $\overset{o}{H}[0,1]$ выберем систему функций таких,

$$Ш_0, Ш_1, Ш_2 \ldots,$$

что они полны в этом пространстве и линейно независимы, то есть образуют базис пространства $\overset{o}{H}[0,1]$.

Приближенное решение (8) представим в виде

$$A\varphi = V = \sum_1^n a_i Ш_i(r). \tag{10}$$

Для простоты обозначим

$$\frac{dV}{dr} = Ax, \qquad \frac{V}{r} = Au.$$

Тогда

$$V_r(A_x + A_u) = c\begin{pmatrix} D(r)r^2(A_x - A_u)^2 + \\ +2r^2S(r)A\dfrac{dx}{dr}(A_x - A_u) + \\ +\dfrac{2}{r}S(r)(A_x - A_u)^2 \end{pmatrix} - 2V_r \tag{11}$$

Помножим (11) скалярно на базисные функции $Ш_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, при этом член

$$\int_0^1 D(r)r^2(Ax - Au)Ш_i dr$$

исчезает, так как интеграл равен значению функции в точках нуля функции $Ax - Au$.

Таким образом, из (10) и (11) приходим к системе алгебраических уравнений, представляющей собой конечномерную аппроксимацию краевой задачи (6):

$$\int_0^1 V_r(Ax - Au)Ш_i dr = c\int_0^1 \begin{pmatrix} 2r^2S(r)A\dfrac{dx}{dr}(Ax - Au) + \\ +\dfrac{2}{r}S(r)(Ax - Au)Ш_i \end{pmatrix} dr - $$

$$-2\int_0^1 V_r Ш_i dr$$

$$i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

В качестве базисных функций $\overset{o}{H}[0,1]$ выберем систему

$$Ш_1 = r(1-r);\ Ш_2 = r^2(1-r);\ Ш_3 - r^2(1-r)^2.$$

Выбранная система является линейно независимой, то есть образует базис в $\overset{o}{H}[0,1]$. Полнота такой системы показана в работах [1-3]. Для простоты ограничимся первыми тремя членами выбранной системы. Проведём ортонормировку базисных функций по формулам [4]:

$$\varphi_1 = \frac{\Psi_1}{\sqrt{(\Psi_1, \Psi_1)}}; \qquad \varphi_2 = \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}};$$

$$\varphi_3 = \frac{g_3}{\sqrt{(g_3, g_3)}},$$

где $g_2 = Ш_2 - (Ш_2, \varphi_1)\varphi_1$,

$g_3 = Ш_3 - (Ш_3, g_2)\varphi_2 - (Ш_3, \varphi_1)\varphi_1$.

В этом случае система (12) упрощается. Следуя работам [5-8], аппроксимируем радиальную компоненту скорости по формуле

$$V_r = \frac{A}{K} rh, \tag{13}$$

где $A = \dfrac{S_щ}{S_T}$ - коэффициент крутки вихревого устройства;

$K = \dfrac{r_{вх}}{r_1}$ - коэффициент аэродинамического пережима;

r - радиус КУ.

Кроме того, положим $h = \dfrac{W_{r_1}}{W_{\varphi_1}} = \dfrac{m}{K}$, где m - константа.

Для цилиндрических ВКУ, например $\dfrac{W_{r_1}}{W_{\varphi_1}} \approx 0,1$, тогда

$$V_r = 0,1\frac{A}{K^2}r = Br, \tag{14}$$

где $B = 0,1\dfrac{A}{K^2}$.

Как было сказано выше, линейная аппроксимация V_r обусловлена уравнением неразрывности и двумерностью рассматриваемой задачи.

Нелинейную систему (12) будем решать методом Ньютона [9]

$$a^{n+1} = a^n - \left[F'\left(a^n\right)\right]^{-1}F\left(a^n\right), \tag{15}$$
$$n = 0,1,2,3,$$

где $a = \left(a_0, a_1, a_2\right)$,

$F(a) = F_1\left(a_0, a_1, a_2\right), F_2\left(a_0, a_1, a_2\right), F_3\left(a_0, a_1, a_2\right)$.

$\left[F'(a)\right]^{-1}$ - матрица, обратная матрице Якоби.

Из уравнения (13) видно, что отношение коэффициента B к коэффициенту масштаба турбулентности $N = 0,1\dfrac{A}{cK^2}$ является параметром задачи. Зависимости коэффициентов a_i от параметра N представлены на рис. 1 [10].

В качестве замечания следует отметить, что кроме представленных на рисунке решений, система имеет еще два решения. Однако линейный анализ на собственные значения показывает, что последние решения являются неустойчивыми и поэтому здесь не приводятся.

Тангенциальная компонента скорости определяется по формуле:

$$V_\phi = a_1\left(r - r^2\right) + a_2\left(\frac{r}{2} + 1,5r^2 - r^3\right) + \\ + a_3\left(\frac{3}{14}r + \frac{17}{14}r^2 - 2r^3 + r^4\right) + r \tag{16}$$

Для определения профиля давлений вихревого потока имеем задачу Коши

$$B^2 r - \frac{V_\varphi^{\ 2}}{r} = \frac{1}{c}\frac{dP}{dr} + 2cBr\left|\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r}\right| \tag{17}$$
$$P(1) = P_1$$

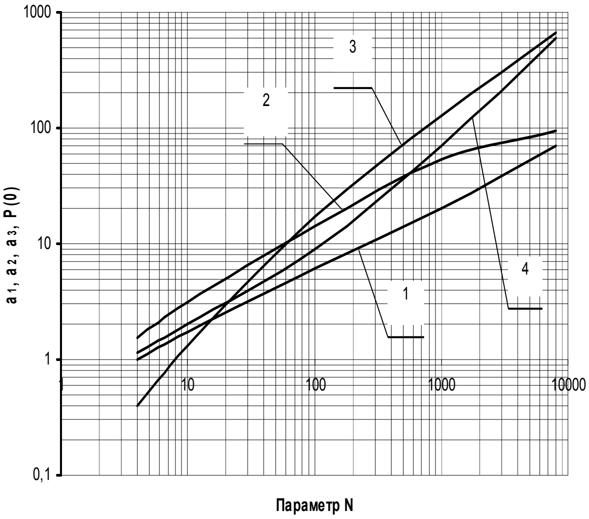

Рис. 1 - Зависимости коэффициентов a_i и давления на оси КУ $P(0)$ от параметра N: 1 - a_1, 2 - a_2, 3 - a_3, 4 - $P(0)$

Решение задачи (17) имеет вид:

$$P(r) - P_1 = Q(r) - 2BcG(r) - Q(1) + \left(G(1)\right)2Bc \tag{18}$$

где

$$Q(r) = a_1 f_1(r) + a_2 f_2(r) + a_3 f_3(r) + \frac{r^2}{2} + a_1 f_7(r) + \\ + a_2^2 f_8(r) + a_3^2 f_9(r) + a_1 a_2 f_4(r) + a_1 a_3 f_5(r) + a_2 a_3 f_7(r)$$
$$G(r) = 0,5(Ar)^2 - f_{10}(r) + f_{11}(r) - f_{12}(r) - f_{13}(r)$$
$$f_1(r) = r^2 - 0,66667r^3, \text{ и т.д.}$$

При расчёте гидравлического сопротивления вихревых устройств в некоторых работах принимается гипотеза, что давление в вихревом потоке равно давлению среды, в которую происходит истечение, на тех радиусах r_m, на которых V_φ достигает своего наибольшего значения. Проверим справедливость данной гипотезы. При $V_\varphi'\left(r_m\right) = 0$ из (16) получаем:

$$a_1\left(1 - 2r_m\right) + a_2\left(-0,5 + 3r_m - 3r_m^2\right) + \\ + a_3\left(-\frac{3}{14} + \frac{17}{7}r_m - 6r_m^2 + 4r_m^3\right) + 1 = 0 \tag{19}$$

Численные значения r_m определяются по алгоритму (15), где

$$f^1(r_m) = -2a_1 + a_2(3-6r_m) + a_3\left(\frac{17}{7} - 12r_m + 12r_m^2\right). \quad (20)$$

Если воспользоваться отмеченным выше равенством, то гидравлическое сопротивление вихревого устройства рассчитывается по формуле (18)

$$ДP = P_1 - P(r_m) = \left(Q(r_m) - G(r_m) - Q(1) + G(1)\right) \quad (21)$$

На рис. 1 представлена также зависимость безразмерного давления на оси контактного устройства $P(0) = P - \frac{P}{cW_{\varphi_1}^2}$ от параметра N. Для использования указанных зависимостей необходимо иметь соотношения, связывающие эмпирическую константу C и коэффициент $B = 0,1\frac{A}{K^2}$.

Выводы

При линейной аппроксимации радиальной компоненты скорости потока $V_r(r)$ краевая задача решена с использованием метода Бубнова-Галёркина. Получены аналитические формулы для расчёта радиальной скорости $V_\varphi(r)$ и профиля давлений $P(r)$, которые удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Литература

1. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. - М. : Мир, 1985. - 584 с.
2. Кеч, В. Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. - М. : Мир, 1978. - 518 с.
3. Махлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Махлин. – М. : Наука, 1986. - 378 с.
4. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. 1984. - 294 с.
5. Гольдштик, М. А. Вихревые потоки / М. А. Гольдштик. - Новосибирск. : Наука, 1996. - 357 с.
6. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1973. - 847 с.
7. Овчинников, А. А. Определение радиуса вихря в вихревых газовых камерах / А. А. Овчинников, Н. А. Николаев. // Труды КХТИ им. С. М. Кирова. - Казань, 1973. - Вып.1. - С. 9 - 14.
8. Шамсутдинов, А. М. Исследование турбулентного потока несжимаемой жидкости три плоском осевом стоке / А. М. Шамсутдинов, В. Е. Паймикин. // Гидродинамика одно- и двухфазных систем: Сб. Трудов ИТ СО АН СССР. - Новосибирск, 1982. - С. 9- 13.
9. Гольдштейн, С. Е. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости / С. Е. Гольдштейн. - М. : Изд. иностр. лит-ры, 1968. - Т.1.
9. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. 1983. - 631 с.
10. Останин, Л. М. Гидродинамика газожидкостного потока в вихревых распылительных устройствах / Л. М. Останин. // Вестник Казанского технол. ун-та. – Казань, 2011. - №4. – С. 177 – 181.

© **Л. М. Останин** – доц. каф. оборудование химических заводов КНИТУ, oxzkstu@rambler.ru; leonid2204@rambler.ru.