

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ЛАЗЕРОВ

Ключевые слова: активный элемент, твердотельный лазер, краевая задача.

В статье ставится и решается задача нахождения распределения температуры в активном элементе твердотельного лазера в режиме охранного нагрева с учетом радиационной составляющей теплообмена. Активный элемент рассматривается в виде пластины, у которой длина много больше остальных размеров, поэтому рассматриваемая задача записывается в виде одномерной краевой задачи уравнения теплопроводности [1, 2]. Исходная краевая задача, вводя безразмерные переменные, сводится к решению сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями на подвижных границах. Приближенное решение которой, используя "геометро-оптический" асимптотический метод [4-6], получается в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров, в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам.

Keywords: active element, solid-state laser, boundary value problem.

In article formulated and solved the problem of finding the temperature distribution in the active element solid-state laser in heating security mode considering radiation heat transfer component. Active element considered as a plate, whose length is much greater than the other sizes, so the problem is written in the form of one-dimensional boundary value problem of the heat equation [1, 2]. Initial boundary value problem, with introducing of dimensionless variables, reduces to the solution of a singularly perturbed boundary value problem of the heat equation with nonlinear boundary conditions on the moving boundaries. An approximate solution in the form of an asymptotic expansion of the solution in the sense of Poincare in powers of the small parameters, depending on the proximity to the borders of the point under consideration were obtained using "geometric-optical" asymptotic method [4-6].

Введение

Современное развитие техники, технологии и научных исследований невозможно без использования лазерной техники. Среди лазерных технологических установок для сварки, резки, закалки и отжига материалов, сверления отверстий и других операций ведущее место в настоящее время принадлежит установкам с твердотельными лазерами, которые так же используются для исследований и испытаний различных материалов, получения высокотемпературной плазмы. При этом для достижения высоких и стабильных параметров лазеров и лазерного излучения необходим учет в конструкции лазера и при управлении режимами их работы различных эффектов, вызванных нагревом различных элементов лазерной остановки. Для обеспечения стабильности параметров лазера и эффективности лазерного излучения необходим правильный выбор теплового режима элементов излучателя, а также учет и компенсация термооптических искажений. Наиболее сильным термооптическим искажением среди элементов лазерного резонатора подвержен активный элемент, в котором происходит значительное тепловыделение при преобразовании поглощаемого ионами активатора излучения ламп накачки в лазерное излучение [1].

Важным с практической точки зрения является исследование распределения температуры в объеме активной среды. Это особенно важно для оптически плотных сред, которые характеризуются сильным поглощением спектрально-серого излучения импульсных ламп накачки. Основные особенности поглощения излучения накачки в таких активных средах позволяют с достаточной степенью точности аппроксимировать распределение объем-

ных источников тепловыделения в активной среде законом Бугера [2].

Постановка задачи

В работе ставится и решается задача нахождения распределения температуры в активном элементе твердотельного лазера в режиме охранного нагрева с учетом радиационной составляющей теплообмена. Активный элемент рассматривается в виде пластины, у которой длина много больше остальных размеров, поэтому исходная задача, считая, что теплофизические параметры не зависят от температуры [1, 2], может быть записана в виде одномерной краевой задачи уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + K(\tau) \cdot \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} + Q(\xi), \quad (1)$$

$$(\xi, \tau) \in \Omega,$$

$$U(\xi, \tau) = U_0(\xi), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} = -q_1(\tau) + \sigma_1 [U^4(\xi, \tau) - U_1^4], \quad \xi = 0, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi} = q_2(\tau) - \sigma_2 [U^4(\xi, \tau) - U_2^4], \quad \xi = 2h, \quad (4)$$

$$(\xi, \tau) \in \Omega = \{(\xi, \tau) : 0 < \xi < 2h, 0 < \tau \leq t_0\}, \quad (5)$$

$$Q(\xi) = \frac{k \cdot P_H}{V_S} \bar{\alpha} \cdot h \frac{ch(\bar{\alpha}(\xi - h))}{sh(\bar{\alpha} \cdot h)}. \quad (6)$$

Компонент $K(\tau) \cdot \frac{\partial U(\xi, \tau)}{\partial \xi}$ в дифференци-

альном уравнении описывает тот факт, что центры окраски, одновременно являясь источниками тепло-выделения, образуют как бы полупрозрачную для излучения накачки границу. Коэффициент $K(\tau)$ отражает временную зависимость поглотительной способности кристалла, вызванной образованием центров окраски. Кинетика процесса образования центров окраски в кристалле носит короткоживущий характер (время жизни центров окраски колеблется от миллисекунд до нескольких секунд) [7,9].

После замены переменных

$$\mu = \xi + \int_0^{\tau} K(z) dz, \quad \eta = \tau, \quad \text{введения безразмерных}$$

переменных $\mu = \bar{x} \cdot x$, $\eta = \bar{t} \cdot t$, и обозначений $U(\bar{x} \cdot x - \bar{x} \cdot \psi(\bar{t} \cdot t), \bar{t} \cdot t) = T(x, t)$, $U_0(\bar{x} \cdot x) = T_0(x)$, получим сингулярно возмущенную краевую задачу уравнения теплопроводности с малым параметром Fo

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = Fo \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + q(x, t), \quad (7)$$

$$T(x, t) = T_0(x), \quad t \rightarrow 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\varphi_1(t) + \gamma_1 \cdot [T^4(x, t) - U_1^4], \quad x = \psi_1(t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \varphi_2(t) + \gamma_2 \cdot [T^4(x, t) - U_2^4], \quad (10)$$

$$x = \psi_2(t),$$

$$(x, t) \in \Omega' = \{(x, t) : \psi_1(t) < x < \psi_2(t), 0 < t \leq \bar{t}_0\}, \quad (11)$$

$$\text{где } Fo = \frac{a^2 \bar{t}}{\bar{x}^2}, \quad 0 < Fo \ll 1; \quad \alpha = \bar{\alpha} \cdot \bar{x}, \quad H = 2 \cdot \frac{h}{\bar{x}},$$

$$\bar{t}_0 = \frac{t_0}{\bar{t}}, \quad \varphi_i(t) = \frac{\bar{x}}{\lambda} \cdot q_i(\bar{t} \cdot t), \quad \gamma_i = (-1)^{i+1} \frac{\bar{x}}{\lambda} \sigma_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\psi_1(t) = \psi(t), \quad \psi_2(t) = \psi(t) + H,$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{t} \cdot t} K(z) dz,$$

$$\Phi(x, t) = \frac{ch\left(\alpha\left(x - \psi(t) - \frac{H}{2}\right)\right)}{sh\left(\alpha \cdot \frac{H}{2}\right)},$$

$$q(x, t) = \frac{k \cdot P_H}{2c\rho V_S} \cdot \alpha H \cdot \Phi(x, t) = q_0 \cdot \Phi(x, t).$$

Для определенности положим

$$\begin{cases} q_i(\bar{t} \cdot t) = q_{i0} = const, \\ \varphi_i(t) = \varphi_{i0} = const, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, исходная краевая задача свелась к сингулярно возмущенной краевой задаче уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями на подвижных границах.

Приближенное решение полученной краевой задачи будем искать, используя "геометро-оптический" асимптотический метод предложенный

Несененко Г.А. [4-6]. Основные положения данного метода заключаются в следующем:

1. Представление решения исследуемой (линейной или нелинейной) краевой задачи в интегральной форме с использованием функции Грина [3].

2. Запись интегрального представления функции Грина при помощи функции источника в виде "тепловых потенциалов" с использованием асимптотики решения соответствующего интегрального уравнения [4-6].

3. Получение и обоснование асимптотического разложения функции Грина (при помощи модификации метода Лапласа) [5,6].

4. Применение модифицированного метода Лапласа к интегральному представлению решения исходной краевой задачи (с использованием асимптотического разложения соответствующей функции Грина) [4-6,10].

Представление функции Грина при помощи функции источника в виде "тепловых потенциалов" является существенным моментом при решении краевых нестационарных задач уравнения теплопроводности при малых значениях параметра Фурье (или числа Фурье Fo); $Fo \ll 1$.

Используя приведенную схему, функцию Грина и приближенное решение краевой задачи получаем в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров в смысле Пуанкаре. Надо отметить, что вид асимптотического разложения, как функции Грина, так и решения краевой задачи зависит от "близости" рассматриваемой точки к границе области. В соответствии с введенным понятием "близости" точки к границе, область делится на "пограничную", "промежуточную" и "удаленную" от границ зоны [4-10].

Решение краевой задачи

Для упрощения выкладок предположим, что граница изменяется по линейному закону, т.е. $K(z) = \bar{k}_0$, тогда

$$\psi(\bar{t} \cdot t) = \bar{k}_0 \frac{\bar{t}}{\bar{x}} \cdot t = k_0 \cdot t = \psi_0(t),$$

$$k_0 = \bar{k}_0 \frac{\bar{t}}{\bar{x}}, \quad \begin{cases} \psi_1(t) = \psi_0(t), \\ \psi_2(t) = \psi_0(t) + H. \end{cases}$$

Согласно [3,5], выпишем интегральное представление решения краевой задачи (7)-(11)

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \int_{\psi_1(0)}^{\psi_2(0)} T_0(y) \Gamma(x, t; y, 0) dy + \\ & + Fo \cdot \varphi_{10} \int_0^t \Gamma(x, t; \psi_1(s), s) ds - \\ & - Fo \cdot \gamma_1 \int_0^t \nu_1(s) \Gamma(x, t; \psi_1(s), s) ds + \\ & + Fo \cdot \varphi_{20} \int_0^t \Gamma(x, t; \psi_2(s), s) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +Fo\gamma_2 \int_0^t \nu_2(s) \Gamma(x, t; \psi_2(s), s) ds + \\
& + q_0 \int_0^t \int_{\psi_1(s)}^{\psi_2(s)} \Phi(y, s) \Gamma(x, t; y, s) dy ds = \\
& = T_{\mathcal{L}}(x, t) + T_{\mathcal{H}\mathcal{L}1}(x, t) + \\
& + T_{\mathcal{H}\mathcal{L}2}(x, t) + T_q(x, t), \quad (12)
\end{aligned}$$

где $\Gamma(x, t; y, s)$ – функция Грина соответствующей однородной краевой задачи.

Для нахождения функции Грина рассматриваем краевую задачу

$$\frac{\partial \Gamma(x, t; y, s)}{\partial t} = Fo \cdot \frac{\partial^2 \Gamma(x, t; y, s)}{\partial x^2}, \quad (13)$$

$$\Gamma(x, t; y, s) = \delta(x - y), \quad t \rightarrow s, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Gamma(x, t; y, s)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$x = \psi_i(t), \quad i = 1, 2$$

$$(x, t) \in \Omega' = \{(x, t) : \psi_1(t) < x < \psi_2(t), 0 < t \leq \bar{t}_0\}. \quad (16)$$

Решение краевой задачи (13)-(16) (при $\psi_i(t) = k_i \cdot t + H_i$, $i = 1, 2$) имеет следующий вид [9,10]:

$$\Gamma(x, t; y, s) = G_0(x, t; y, s) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \Gamma_j^{(m)}(x, t; y, s),$$

$$G_0(x, t; y, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo(t-s)}} \exp\left\{-\frac{[x-y]^2}{4Fo(t-s)}\right\},$$

$$\Gamma_{1,m}(x, t; y, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo(t-s)}} \exp\{\Phi_{12} - \Phi_{11}\},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,m}(x, t; y, s) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo(t-s)}} \exp\{-\Phi_{21} - \Phi_{22}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{3,m}(x, t; y, s) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo(t-s)}} \exp\{\Phi_{32} - \Phi_{31}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,m}(x, t; y, s) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo(t-s)}} \exp\{-\Phi_{41} - \Phi_{42}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{5,m}(x, t; y, s) &= -\frac{(m+1)(k_2 - k_1) - k_2}{2Fo} \cdot \\ &\cdot \exp\{\Phi_{12}\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{\Phi_{11}}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{6,m}(x, t; y, s) &= -\frac{(m+1)(k_2 - k_1) + k_1}{2Fo} \cdot \\ &\cdot \exp\{-\Phi_{22}\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{\Phi_{21}}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{7,m}(x, t; y, s) &= \frac{(m+1)(k_2 - k_1)}{2Fo} \exp\{\Phi_{32}\} \cdot \\ &\cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{\Phi_{31}}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{8,m}(x, t; y, s) &= -\frac{(m+1)(k_2 - k_1)}{2Fo} \exp\{-\Phi_{42}\} \cdot \\ &\cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{\Phi_{41}}\}, \end{aligned}$$

$$A_1 = x - k_1 \cdot t - H_1, \quad A_2 = k_2 \cdot t + H_2 - x,$$

$$B_1 = y - k_1 \cdot s - H_1, \quad B_2 = k_2 \cdot s + H_2 - y,$$

$$\Phi_{i1} = \frac{[A_i + B_i + 2m(B_1 + B_2)]^2}{4Fo(s_0 - s)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Phi_{i2} = \frac{B_i + m(B_1 + B_2)}{Fo} [k_i + (-1)^i m(k_2 - k_1)], \quad i = 1, 2$$

$$\Phi_{i1} = \frac{[A_{i-2} - B_{i-2} + 2(m+1)(B_1 + B_2)]^2}{4Fo(s_0 - s)}, \quad i = 3, 4;$$

$$\Phi_{i2} = \frac{(m+1)}{Fo} \cdot$$

$$\cdot [k_{i-2}(B_1 + B_2) + (-1)^i (k_2 - k_1) [(m+1)(B_1 + B_2) - B_{i-2}]], \quad i = 3, 4.$$

Очевидно, что для исходной задачи $H_1 = 0$, $H_2 = H$, $k_1 = k_2 = k_0$.

Для упрощения выкладок предположим, что $T_0(x) = T_0 = \text{const}$, тогда можно получить следующие выражения

$$T_{\mathcal{L}}(x, t) = T_0 + \frac{Fo}{2k_0} \cdot \sum_{i=1}^2 \varphi_{i0} \cdot A_i(x, t), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
A_i(x, t) &= \operatorname{erfc}\left[\frac{x - (i-1)H}{2\sqrt{Fot}}\right] + \\
&+ \exp\left\{(-1)^i \frac{k_0 [x - k_0 t - (i-1)H]}{Fo}\right\} \times \\
&\times \operatorname{erfc}\left[\frac{x - 2k_0 t - (i-1)H}{Fo}\right] + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{k_0 [x - k_0 t + (m+i-1)H]}{Fo}\right\} \cdot \right. \\
&\cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{x - 2k_0 t + (2m+3-i)H}{2\sqrt{Fot}}\right] - \\
&- \exp\left\{\frac{k_0 [k_0 t - x + (m+i)H]}{Fo}\right\} \cdot \\
&\cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{2k_0 t - x + (2m+i+1)H}{2\sqrt{Fot}}\right] + \\
&+ (-1)^i \exp\left\{(-1)^{i-1} \frac{k_0 (m+1)H}{Fo}\right\} \cdot \\
&\cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{(-1)^{i-1} x + (2m+i+1)H}{2\sqrt{Fot}}\right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k_0 \left[(-1)^{i-1} x + (2m+i-1)H \right]}{Fo} \exp \left\{ (-1)^{i-1} \frac{k_0 m H}{Fo} \right\} \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{(-1)^{i-1} x + (2m+i-1)H}{2\sqrt{Fot}} \right] + \\
& + (-1)^{i-1} \left[1 + \frac{(-1)^i k_0 \left[(-1)^i x + (2m+3-i)H \right]}{Fo} \right] \cdot \\
& \cdot \exp \left\{ \frac{(-1)^i k_0 (m+1)H}{Fo} \right\} \times \\
& \times \operatorname{erfc} \left[\frac{(-1)^i x + (2m+3-i)H}{2\sqrt{Fot}} \right] + \\
& + 2k_0 \sqrt{\frac{t}{\pi Fo}} \cdot \\
& \cdot \left\{ \exp \left\{ (-1)^{i-1} \frac{k_0 m H}{Fo} - \frac{\left[(-1)^{i-1} x + (2m+i-1)H \right]^2}{4Fot} \right\} + \right. \\
& \left. + (-1)^{i-1} \exp \left\{ (-1)^i \frac{k_0 m H}{Fo} - \frac{\left[(-1)^i x + (2m+3-i)H \right]^2}{4Fot} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{erfc}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du.$$

Для интеграла $T_q(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned}
T_q(x, t) &= q_0 \int_0^t \int_{k_0 s}^{k_0 s + H} \frac{ch \left(\alpha \left[y - \frac{H}{2} - k_0 s \right] \right)}{sh \left(\alpha \cdot \frac{H}{2} \right)} \Gamma(x, t; y, s) dy ds = \\
&= \frac{q_0}{sh \left(\alpha \cdot \frac{H}{2} \right)} \int_0^t \int_{k_0 s}^{k_0 s + H} ch \left(\alpha \left[y - \frac{H}{2} - k_0 s \right] \right) \cdot \\
&\cdot \left[G_0(x, t; y, s) + \sum_{m=0}^\infty \sum_{j=1}^8 \Gamma_j^{(m)}(x, t; y, s) \right] dy ds = \\
&= \frac{q_0}{sh \left(\alpha \cdot \frac{H}{2} \right)} \left[l_0(x, t) + \sum_{j=1}^8 l_j(x, t) \right].
\end{aligned}$$

Тогда для интеграла $l_0(x, t)$ можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned}
l_0(x, t) &= 2Fot \cdot \exp \left\{ -\frac{k_0 [x - k_0 t]}{2Fo} \right\} \cdot \\
&\cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{k_0 t - x}{2\sqrt{Fot}} \right] \times \left[\frac{1}{[k_0 + 2\alpha Fo]^2} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{[k_0 + 2\alpha Fo][k_0 t - x]}{4Fo} - \frac{1}{2} \right] \cdot \\
& \cdot \exp \left\{ -\alpha \frac{H}{2} \right\} + \left[\frac{[k_0 - 2\alpha Fo][k_0 t - x]}{4Fo} - \frac{1}{2} \right] \times \\
& \times \frac{1}{[k_0 - 2\alpha Fo]^2} \exp \left\{ \alpha \frac{H}{2} \right\} + \\
& + \sqrt{\frac{Fot}{\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{k_0 [x - k_0 t]}{2Fo} \right\} \exp \left\{ -\frac{[-x + k_0 t]^2}{4Fot} \right\} \times \\
& \times \left[-\frac{t}{[k_0 + 2\alpha Fo]} \exp \left\{ -\alpha \frac{H}{2} \right\} - \frac{t}{[k_0 - 2\alpha Fo]} \exp \left\{ \alpha \frac{H}{2} \right\} \right] + \\
& + \frac{Fot}{[k_0 + 2\alpha Fo]^2} \exp \left\{ \frac{k_0 t + 2\alpha Fot}{2\sqrt{Fot}} - \alpha \left[\frac{H}{2} + k_0 t - x \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{2\alpha Fot - x}{2\sqrt{Fot}} \right] + \\
& + \frac{Fot}{[k_0 - 2\alpha Fo]^2} \exp \left\{ \frac{k_0 t - 2\alpha Fot}{2\sqrt{Fot}} - \alpha \left[\frac{H}{2} + k_0 t - x \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{-2\alpha Fot - x}{2\sqrt{Fot}} \right] + \\
& + 2Fot \cdot \exp \left\{ -\frac{k_0 [x - k_0 t - H]}{2Fo} \right\} \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{k_0 t + H - x}{2\sqrt{Fot}} \right] \left[-\frac{1}{[k_0 + 2\alpha Fo]^2} \times \right. \\
& \times \left[\frac{[k_0 + 2\alpha Fo][k_0 t + H - x]}{4Fo} - \frac{1}{2} \right] \cdot \exp \left\{ \alpha \frac{H}{2} \right\} - \\
& - \left[\frac{[k_0 - 2\alpha Fo][k_0 t + H - x]}{4Fo} - \frac{1}{2} \right] \times \\
& \times \frac{1}{[k_0 - 2\alpha Fo]^2} \exp \left\{ -\alpha \frac{H}{2} \right\} \left. \right] + \sqrt{\frac{Fot}{\pi}} \cdot \\
& \cdot \exp \left\{ -\frac{k_0 [x - k_0 t - H]}{2Fo} \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ -\frac{[k_0 t + H - x]^2}{4Fot} \right\} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{t}{[k_0 + 2\alpha Fo]} \exp \left\{ \alpha \frac{H}{2} \right\} + \frac{t}{[k_0 - 2\alpha Fo]} \exp \left\{ -\alpha \frac{H}{2} \right\} \right] - \\
& - \frac{Fot}{[k_0 + 2\alpha Fo]^2} \exp \left\{ \frac{k_0 t + 2\alpha Fot}{2\sqrt{Fot}} - \alpha \left[\frac{H}{2} + k_0 t - x \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{2\alpha Fot + H - x}{2\sqrt{Fot}} \right] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{Fot}{[k_0 - 2\alpha Fo]^2} \exp \left\{ \frac{k_0 t - 2\alpha Fot}{2\sqrt{Fot}} + \alpha \left[\frac{H}{2} + k_0 t - x \right] \right\} \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{H - 2\alpha Fot - x}{2\sqrt{Fot}} \right].$$

Аналогично получаются выражения и для остальных интегралов. Далее проводится асимптотический анализ полученных выражений по степеням малых параметров в зависимости от “близости” рассматриваемой точки к границам области Ω' [4-10].

Для нахождения нелинейной составляющей в интегральном представлении введем обозначения

$$\begin{cases} T_{\Pi q}(x, t) = T_{\Pi}(x, t) + T_q(x, t), \\ T_{\Pi \Pi}(x, t) = T_{\Pi \Pi 1}(x, t) + T_{\Pi \Pi 2}(x, t), \end{cases}$$

тогда

$$T(x, t) = T_{\Pi q}(x, t) + T_{\Pi \Pi}(x, t).$$

Неизвестные функции $v_1(t)$, $v_2(t)$ находим из решения системы интегральных уравнений выписываемых из граничных условий (9)-(10)

$$\begin{cases} v_1(t) = \gamma_1 [F_1(v_1(t), v_2(t)) - \bar{u}_1], \\ v_2(t) = \gamma_2 [F_2(v_1(t), v_2(t)) - \bar{u}_2], \end{cases}$$

где

$$F_j(v_1(t), v_2(t)) =$$

$$= \left[T_{\Pi q}^j(t) + Fo \sum_{i=1}^2 (-)^i \gamma_i \cdot K_i^{(j)}(v_i(t)) \right]^4, \quad j = 1, 2;$$

$$K_1^{(1)}(v_1(t)) = \int_0^t v_1(s) \Gamma(k_0 t, t; k_0 s, s) ds,$$

$$T_{\Pi q}^{(1)}(t) = T_{\Pi q}(x, t) \Big|_{x=k_0 t},$$

$$K_2^{(1)}(v_2(t)) = \int_0^t v_2(s) \Gamma(k_0 t, t; k_0 s + H, s) ds,$$

$$T_{\Pi q}^{(2)}(t) = T_{\Pi q}(x, t) \Big|_{x=k_0 t + H},$$

$$K_1^{(2)}(v_1(t)) = \int_0^t v_1(s) \Gamma(k_0 t + H, t; k_0 s, s) ds,$$

$$\bar{u}_1 = \frac{\varphi_1}{\gamma_1} + U_1^4,$$

$$K_2^{(2)}(v_2(t)) = \int_0^t v_2(s) \Gamma(k_0 t + H, t; k_0 s + H, s) ds,$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{\varphi_2}{\gamma_2} + U_2^4.$$

Решение данной системы уравнений ищем методом последовательных приближений по схеме

$$\begin{cases} v_1^{(n+1)}(t) = \gamma_1 [F_1(v_1^{(n)}(t), v_2^{(n)}(t)) - \bar{u}_1], \\ v_2^{(n+1)}(t) = \gamma_2 [F_2(v_1^{(n)}(t), v_2^{(n)}(t)) - \bar{u}_2], \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, K.$$

Полагая $v_1^{(0)}(t) = 0$, $v_2^{(0)}(t) = 0$, для первого приближения получим

$$\begin{cases} v_1^{(1)}(t) = \gamma_1 [F_1(0, 0) - \bar{u}_1], \\ v_2^{(1)}(t) = \gamma_2 [F_2(0, 0) - \bar{u}_2]. \end{cases}$$

Для следующих приближений проведем асимптотический анализ соответствующих интегралов. Тогда решение получается в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра Fo

$$v_i(t) = \sum_{j=0}^N c_j^{(i)}(t) \cdot Fo^j + O(Fo^{N+1}), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где коэффициенты $c_j^{(i)}(t)$ вычисляются в явном виде.

Подставив полученные разложения в выражение (12), проведем асимптотический анализ полученных интегралов методом Лапласа. При этом необходимо учитывать “близость” рассматриваемой точки (x, t) к границам области Ω' .

Тогда верно следующее утверждение.

Теорема. Асимптотическое разложение решения краевой задачи (7)-(11) имеет следующий вид:

1) В “пограничном слое” границы $x = k_0 t$, т.е.

при выполнении условия

$$x - k_0 t = O(Fo^p), \quad p > 1,$$

$$T_{pg0}(x, t) = T_0 + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{\bar{N}} d_{ij}^{(0)}(x, t) \cdot \left(\frac{x - k_0 t}{Fo} \right)^j \cdot Fo^i + O\left(\left(\frac{x - k_0 t}{Fo} \right)^{\bar{N}+1} \cdot Fo^{N+1} \right), \quad Fo \rightarrow 0. \quad (19)$$

2) В “промежуточном слое” границы $x = k_0 t$,

т.е. при выполнении условия

$$x - k_0 t = O(Fo), \quad Fo \rightarrow 0,$$

$$T_{pr0}(x, t) = T_0 + \sum_{i=0}^M d_i^{(1)}(x, t) \cdot Fo^i + O(Fo^{M+1}). \quad (20)$$

3) В “области удаленных от границ $x = k_0 t$,

$x = k_0 t + H$ точек”, где выполняется условие

$$(\text{при } p < 1), \quad x - k_0 t = O(Fo^p),$$

$$k_0 t + H - x = O(Fo^p), \quad Fo \rightarrow 0,$$

$$T_{ud}(x, t) \approx T_0 + T_q(x, t). \quad (21)$$

4) В “промежуточном слое” границы

$x = k_0 t + H$, т.е. при выполнении условия

$$k_0 t + H - x = O(Fo), \quad Fo \rightarrow 0,$$

$$T_{prH}(x, t) = T_0 + \sum_{i=0}^M d_i^{(2)}(x, t) \cdot Fo^i + O(Fo^{M+1}). \quad (22)$$

5) В “пограничном слое” границы $x = k_0 t + H$,

т.е. при выполнении условия

$$k_0 t + H - x = O(Fo^p), \quad p > 1,$$

$$T_{pgH}(x, t) = T_0 + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{\bar{N}} d_{ij}^{(3)}(x, t) \cdot \left(\frac{k_0 t + H - x}{Fo} \right)^j \cdot Fo^i +$$

$$+ O \left(\left(\frac{k_0 t + H - x}{Fo} \right)^{\bar{N}+1} \cdot Fo^{N+1} \right), \quad Fo \rightarrow 0. \quad (23)$$

Коэффициенты асимптотических разложений $d_{ij}^{(0)}(x, t)$, $d_{ij}^{(1)}(x, t)$, $d_{ij}^{(2)}(x, t)$, $d_{ij}^{(3)}(x, t)$ вычисляются в явном виде (например, они выписаны в явном виде для соответствующих задач в [4,9,10]) и не зависят от малых параметров разложения, т.е. имеем асимптотическое разложение в смысле Пуанкаре; полученные разложения удовлетворяют начальным и граничным условиям поставленной задачи.

Проверка граничных условий

Для начального момента времени легко показать, что основной вклад в $T(x, t)$ вносит начальное распределение температуры T_0 , поэтому верно

$$T(x, t) = T_0 + O \left(\exp \left\{ -\frac{c_1}{Fo} \right\} \right), \quad t \rightarrow 0,$$

$$c_1 = \text{const} > 0, \quad Fo \rightarrow 0.$$

Проверим выполнимость граничного условия (9). Используя выражение (12) получим

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=k_0 t} =$$

$$= \left(\frac{\partial T_{Л0}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial T_{НЛ1}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial T_{НЛ2}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial T_q(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=k_0 t} = \text{ры};$$

$$= \left(\frac{\partial T_{Лq}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial T_{НЛ}(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=k_0 t}.$$

Из выражений (13), (15) следует (более подробные выкладки можно найти, на примере соответствующих задач, в работах [7-10]):

$$\left. \frac{\partial T_q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=k_0 t} \approx \exp \left\{ -\frac{c_2}{Fo} \right\},$$

$$c_2 = \text{const} > 0, \quad Fo \rightarrow 0,$$

$$\left. \frac{\partial T_{НЛ2}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=k_0 t} \approx \exp \left\{ -\frac{c_3}{Fo} \right\}, \quad c_3 = \text{const} > 0,$$

$$Fo \rightarrow 0,$$

$$\left(\frac{\partial T_{Л0}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial T_{НЛ1}(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=k_0 t} \approx \varphi_0.$$

Для границы $x = k_0 t + H$ проверка проводится аналогично.

Заключение

Получено решение поставленной сингулярно возмущенной краевой задачи в виде асимптотических разложений в смысле Пуанкаре в зависимости от “близости” рассматриваемой точки к границам области. При этом коэффициенты разложений вычисляются в явном виде, что позволяет проводить параметрический анализ поставленной задачи.

Полученные результаты позволяют исследовать рассматриваемый процесс как на качественном, так и на количественном уровне; выявить влияние режимов облучения, радиационной составляющей и начальной температуры на распределение температуры в активном элементе лазера [7-8].

Рассмотренный подход может быть использован и в многомерном случае [11,12].

Список обозначений

$U(\xi, \tau)$ – искомая функция (температура тела);

$Q(\xi)$ – объемная плотность тепловыделения в активной среде;

k – доля энергии накачки, которая непосредственно превращается в тепло;

$\bar{\alpha}$ – спектрально-средний коэффициент поглощения;

P_H – мощность оптической накачки;

V_S – объем активного тела (пластины);

$2h$ – толщина пластины;

λ – коэффициент теплопроводности;

c – теплоемкость;

ρ – плотность материала;

a^2 – коэффициент температуропроводности;

$U_0(\xi)$ – начальное распределение температуры;

$q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ – тепловой поток на соответствующих гранях пластины;

U_1, U_2 – температура среды на соответствующих гранях;

σ_1, σ_2 – постоянные ($\sigma_i = s_i \cdot \sigma$, $i = 1, 2$);

s_1, s_2 – коэффициенты серости граней пластины;

σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Литература

1. Мезенов А.В. Термооптика твердотельных лазеров / А.В. Мезенов, Л.Н. Сомс, А.И. Степанов – Л: Машиностроение, 1986. – 197 с.
2. Алпатьев А.Н. Особенности тепловых и генерационных режимов оптически плотных активных сред / А.Н. Ал-патьев, А.А. Данилов, Н.Ю. Никольский, А.Н. Прохоров, В.Б. Цветков, И.А. Щербаков // Изд. АН СССР. Труды института общей физики. – 1990. – Т. 26. – С. 107-124.
3. Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математи-

- ческой физики / А.Н. Тихонов // Бюлл. МГУ. – 1938. – Т.1(А). – № 8 – С. 1-25.
4. Несененко Г.А. Асимптотическое решение нестационарной задачи теплопроводности с нелинейным условием экспоненциального типа на подвижной границе / Г.А. Несененко, В.Ф. Кравченко // Доклады РАН. – 1998. – Т. 358, № 3. – С. 315-318.
 5. Несененко Г.А. Применение интегральных уравнений к сингулярно возмущенной нестационарной краевой задаче теплопроводности с подвижными границами / Г.А. Несененко, И.И. Латыпов, В.Ф. Кравченко // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 9. – С. 1171-1178.
 6. Кравченко В. Ф. Асимптотики Пуанкаре решений нелинейных сингулярно возмущенных задач нестационарного тепло- и массопереноса / В.Ф. Кравченко, Г.А. Несененко, В.И. Пустовойт. – М.: Физматлит, 2006. – 325 с.
 7. Несененко Г.А. Приближенный расчет температурного поля активного элемента лазера при охранном нагреве / Г.А. Несененко, И.И. Латыпов, С.П. Насельский // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения – Киев: Инт. Математики АН Украины, 1993.– С. 94-95.
 8. Латыпов И.И. Асимптотика решения нелинейной сингулярно возмущенной задачи тепловой защиты пористым охлаждением / И.И. Латыпов, Г.А. Несененко // Тепломассообмен – ММФ – 96. Радиационный и комбинированный теплообмен. Т. 2. – Минск: АНК ИТМО им. А. В. Лыкова АНБ, 1996. – С. 167-171.
 9. Латыпов И.И. Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера. // Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. Уфа.: Гилем, 2001. – С. 82-92.
 10. Латыпов И.И. Моделирование испарения материала короткими лазерными импульсами. Труды четвертой Российской национальной конференции по теплообмену: В 8 томах. Т.5. Испарение, конденсация. – М.: Изд. дом МЭИ, 2006. – С.138-142.
 11. Серова В.Н. Лазерно-активные среды на красителях в сополиметакрилатных матрицах: особенности синтеза, старения и стабилизации / В.Н.Серова // Вестник Казанского технологического университета. – 2008. – № 5.– С. 50-65.
 12. Серова В.Н. Получение полимерных изделий с применением лазерных технологий на примере Лондонского университета Метрополитан / В.Н.Серова // Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – Т. 15, № 6.– С. 76-78.

© **И. И. Латыпов** – к.ф.-м.н., доцент Бирского филиала Башкирского государственного университета; **Р. А. Шакиров** – студент кафедры ТПК КНИТУ; **Н. В. Улитин** – д.х.н., профессор кафедры ТППКМ КНИТУ, ov_stoyanov@mail.ru.