

УДК 61.63

Р. Н. Ганиев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКСТРУДЕРА КАК ОБЪЕКТА
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: процесс экструзии, гидродинамическая модель, экструдер.

В статье предлагается математическая модель, построенная на основе гидродинамической модели процесса экструзии резиновых смесей. Модель основана на взаимосвязи энергосиловых, реологических и геометрических параметров червячной машины при переработке полимеров. На базе приведенной математической модели составлена структурная схема экструдера, отражающая взаимосвязь входных и выходных переменных.

Keywords: extrusion process, hydrodynamic model, extruder.

In this article mathematic model built on hydrodynamic model of extrusion rubber mixtures is suggested. Model based on the relations of energy-power, reology and geometrical parameters in process of treatment polymers. On base presented model extruder structure scheme is composed. It shows relationship input and output variables.

Задача построения автоматической системы управления экструдера требует анализа зависимостей энергосиловых, геометрических и реологических параметров процесса экструзии и создания математической модели, отражающей характер этих зависимостей в динамике. В работах [8,10,11] приводится подробное описание физико-химических процессов экструзии, однако не дается обобщенного представления экструдера как объекта управления.

Для первичной оценки управляемости исследуемого объекта, рассмотрим ламинарное течение несжимаемой изотропной жидкости в направлении оси рабочего цилиндра экструдера, записанное в общем виде [10, 11]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad (1)$$

где p - давление расплава, Па; $\eta_{эф}$ - эффективная вязкость расплава. Па с; v_z - скорость движения расплава вдоль канала червяка, м/с; x, y — текущие координаты частиц расплава, м.

Уравнение (1) описывает винтовое течение неньютоновской жидкости для всех реальных случаев [1,2,3]. Получить общее аналитическое решение (1) сложно, оно может быть получено только численным методом. Для составления модели, допускающей аналитическое решение, принимаются следующие допущения, приведенные в [9,10]:

- вязкость расплава очень мало изменяется вдоль оси x в поперечном сечении канала, температура экструдата в канале и величина градиента скорости почти не меняются, поэтому принимаем $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, η - коэффициент вязкости;

- поскольку вязкость расплава по высоте канала также практически не меняется, допустимо принять $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$;

- влияние стенок винтового канала на распределение скорости пренебрежимо мало, поэтому $\frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$;

- движение в направлении оси y существует только в непосредственной близости к стенкам канала, в остальной части сечения канала течение в направлении оси y отсутствует;

- размеры канала по всей длине практически постоянны, поэтому, значения скоростей v_x, v_z не зависят от координаты z ;

- вследствие большого отношения винтового канала к его глубине, а

также особенностей циркуляционного течения можно принять, что скорости v_x, v_z не зависят от координаты X , следовательно,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Из уравнений равновесия напряжения, приведенных в [94], получим:

$$p_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}; p_{yz} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial y}; p_{zx} = 0 \quad (3)$$

С учетом принятых допущений уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

После преобразований уравнения (4) может быть получено объемное уравнение производительности экструдера, приведенное в [9]. С учетом потока утечки данное уравнение запишется в виде :

$$Q = \frac{\pi^2 D^2 k_n h_{cp} \sin \varphi \cos \varphi}{2} \left(1 - \frac{ie}{t}\right) F_a - \quad (5)$$

$$- \frac{\pi^2 k_o D h_{cp}^3 \sin^2 \varphi}{12 \eta_{эф} L} \frac{\partial p}{\partial l} \left(1 - \frac{ie}{t}\right) F_p - \frac{\pi^2 D^2 \delta^3 \operatorname{tg} \varphi \Delta P}{10 \eta_{эф} e L}$$

В винтовом канале червяка с постоянными размерами и постоянной вязкостью $\eta_{эф}$, Па с, градиент давления по длине канала является постоянным. Тогда можно принять:

$$\frac{dp}{dl} = \frac{\Delta P}{L} \quad (6)$$

Работа червячного экструдера зависит не только от конструкции червяка, но и от формулирующего инструмента (головки). Конструкция и проходные сечения каналов, конструктивное оформление формулирующего инструмента зависят от реологических

свойств расплава полимеров и специфических гидродинамических явлений [7]. Для получения формулы производительности формующего инструмента примем допущения [6], согласно которым:

- в местах стыков каналов с различной геометрией имеются, как правило, монотонные переходы, поэтому влиянием входных эффектов можно пренебречь;

- каналы головки можно разбить на ряд зон, характеризующихся постоянным или монотонно изменяющимся поперечным сечением, для которых находятся коэффициент гидравлического сопротивления;

- расчет формующего инструмента будем рассматривать при показателе течения, равном единице, т.е. для ньютоновской жидкости.

Объемная производительность потока ньютоновских жидкостей через формующий инструмент Q , кг/с определяется по формуле:

$$Q = K_g \frac{\Delta P}{\eta_{эф}}, \quad (7)$$

где K_g — общая константа головки, зависящая от конфигурации и размеров отдельных элементов головки, m^3 .

Используя выражения (2) и (6), приведем уравнение (5) к более удобному виду:

$$K_g \frac{\Delta P}{\eta_{эф}} + \beta \frac{dp}{dl} + \gamma \frac{\Delta P}{\eta_{эф}} = \frac{30\alpha\omega_{ш}}{\pi}, \quad (8)$$

где $\omega_{ш}$ - угловая скорость вращения червяка, $рад/с$.

В этом уравнении имеется производная по направлению dp/dl . Для эквивалентного преобразования используем выражение, приведенное в [7]:

$$dl = \omega_{ш} R_{ц} tg\varphi dt, \quad (9)$$

где $R_{ц}$ - радиус цилиндра, m .

Заменив производную градиента давления dp/dl на производную, отражающую временную зависимость изменения давления от времени dp/dt , получим выражение:

$$\omega_{ш} (K_g \frac{\Delta P}{\eta_{эф}} + \gamma \frac{\Delta P}{\eta_{эф}}) + \beta \frac{L}{\mu R_{ц} tg\varphi} = \frac{30\alpha\omega_{ш}^2}{\pi}, \quad (10)$$

где ΔP — приращение давления по длине всего канала головки, $Па$.

Уравнение (10) является нелинейным. Линеаризация уравнения экструдера позволит получить передаточную функцию объекта. Для этого выразим переменные через приращения $\Delta\omega$, ΔP относительно координат рабочей точки экструдера ($\omega_{шр}$, P_0):

$$\omega_{ш} = \omega_{шр} + \Delta\omega, P = P_0 + \Delta P. \quad (11)$$

Подставив эти выражения в исходное соотношение (8), упростим запись координат рабочей точки. В результате получается линейное выражение для приращений. После преобразований уравнение для статического режима приобретает вид:

$$K_g \frac{P}{\eta_{эф}} + \gamma \frac{P}{\eta_{эф}} = \frac{30\alpha\omega_{шр}}{\pi}. \quad (12)$$

В динамическом режиме уравнение, связывающее приращения координат, можно записать так:

$$\Delta\omega_{ш} (K_g \frac{\Delta P}{\eta_{эф}} + \gamma \frac{\Delta P}{\eta_{эф}}) + \beta \frac{L}{\mu R_{ц} tg\varphi} = \frac{30\alpha \cdot 2\Delta\omega_{ш}\omega_{шр}}{\pi} \quad (13)$$

На основании уравнений производительности, показанных в [8], можно записать передаточную функцию экструдера между частотой вращения червяка и выходным давлением. После соответствующих преобразований получим:

$$W_{\omega} = \frac{\Delta P}{\Delta\omega_{ш}} = \frac{60\alpha\omega_{шр}\alpha/\pi - P(K_g + \gamma)/\eta}{\beta\alpha/\eta R_{ц} tg\varphi p + \omega_{шр}(K + \gamma)} \quad (14)$$

где p - оператор Лапласа.

Запишем данную передаточную функцию в упрощенном виде:

$$W_{\omega} = \frac{\Delta P}{\Delta\omega_{ш}} = \frac{K_{\omega}}{T_{\omega} p + 1}, \quad (15)$$

где $K_{\omega} = \frac{60\alpha\eta_{эф}}{\pi(K + \gamma)} - \frac{P}{\omega_{шр}}$, $T_{\omega} = \frac{\beta L}{R_{ц} tg\varphi \cdot \omega_{шр} (K + \gamma)}$ соответственно коэффициент передачи и постоянная времени экструдера по скорости как аperiodического звена первого порядка.

Можно видеть, что переходной процесс изменения давления на входе формующей головки носит явно выраженный аperiodический характер. Инерционность экструдера зависит как от конструктивных параметров экструдера и формующего инструмента, так и от физико-химических свойств перерабатываемого полимера. Это факт находится в согласии с принятыми выше допущениями и упрощениями гидродинамической модели.

Для оценки крутящего момента на валу червяка, рассмотрим выражение мощности привода червяка, данное в [6]:

$$W_n = \frac{\pi^2}{2} D^2 N h_{cp} \Delta P tg\varphi + \pi^3 D^2 N^2 \bar{\eta}_{эф} L_2 \frac{D}{h_{cp} \cos\varphi} \quad (16)$$

Поделив обе части этого уравнения на величину $\omega_{шр}$, получим линейное уравнение, разрешенное относительно давления P в виде:

$$P = \frac{M - k_2\omega}{k_1}, \quad (17)$$

где $M_{ш} = W_n / \omega_{шр}$ - момент на валу червяка (шнека);

$k_1 = \frac{\pi^2}{2} D^2 h_{cp} tg\varphi$, $k_2 = \pi^3 D^2 \bar{\eta}_{эф} L_2 \frac{D}{h_{cp} \cos\varphi}$ - константы

экструдера. Уравнения (16), (17), а также уравнение вращательного движения червяка

$$M_{ш} - M_c = J_{ш} p \omega_{ш}, \quad (18)$$

где $J_{ш}$ - момент инерции червяка; позволяют представить экструдер в виде объекта управления, структурная схема которого приведена на рис. 1.

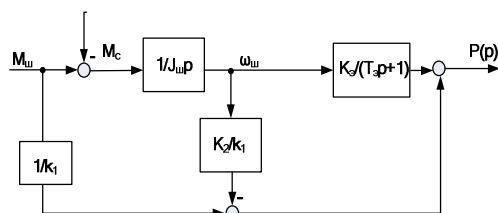


Рис. 1 - Структурная схема экструдера, согласно уравнениям (16) – (18)

Используя аналогию работы экструдера и насоса как устройств, перекачивающих некоторый объем материала, можно вывести выражение для мощности, затрачиваемой на этот процесс. Мощность указанных механизмов выводится из выражения кинетической энергии, сообщаемой движущейся жидкости [4]:

$$E = \frac{mv^2}{2}, \quad (19)$$

где m – масса жидкого материала, проходящая через нагнетательную часть насоса или головку экструдера, кг.; v – скорость движения материала, м/с. Массу материала можно определить как

$$m = \rho V, \quad (20)$$

где ρ – плотность (кг/м³), V – объем материала (м³), проходящего через поперечное сечение канала течения S (м²).

Исходя из определения мощности в механике как работы, совершаемой в единицу времени ($W=A/t$) и считая, что вся кинетическая энергия расходуется на перемещение жидкого материала ($A=E$), с учетом (18) и (19) получим общее выражение для мощности, затрачиваемой на осуществление указанного процесса:

$$W = \frac{A}{t} = \frac{mv^2}{2t} = \frac{\rho V v^2}{2t}. \quad (21)$$

Объем материала V , прошедшего через поперечное сечение канала за время t определяется скоростью истечения жидкости через поперечное сечение канала S , поэтому справедливо соотношение:

$$\frac{V}{t} = \frac{S}{v}. \quad (22)$$

Откуда:

$$W = \frac{\rho \cdot S \cdot v^3}{2}. \quad (23)$$

Таким образом, если учесть, что $S \cdot v = Q_r$ – производительность головки (м³/с), $\frac{\rho \cdot v^2}{2} = P_r$ – удельное давление или напор материала на выходе головки (Н/м²), получим выражение, определяющее мощность на продавливание жидкого материала сквозь фильеру:

$$W = Q_r P_r. \quad (24)$$

Примем, что в установившемся режиме давление в головке равно давлению, развиваемому червяком. Тогда связь производительности с давлением в головке может быть определена по формуле $Q_r = B_3 P_r / \eta_{эф}$ [8]. Полагая, что основная часть кинетической энергии червяка затрачивается на преодоление реакций каналов головки, можно установить, что статический момент сопротивления вращению червяка может быть определен как отношение полной мощности W_{Π} к скорости вращения червяка $\omega_{ш}$:

$$M_c = \frac{W}{\omega_{ш}} = \frac{P_r Q_r}{\omega_{ш}}, \quad (25)$$

Таким образом, согласно уравнениям (18-24) в структурную схему системы «экструдер – нагрузка» вводится внутренняя отрицательная обратная связь. Структурная схема привода экструдера принимает следующий вид (рис.2).

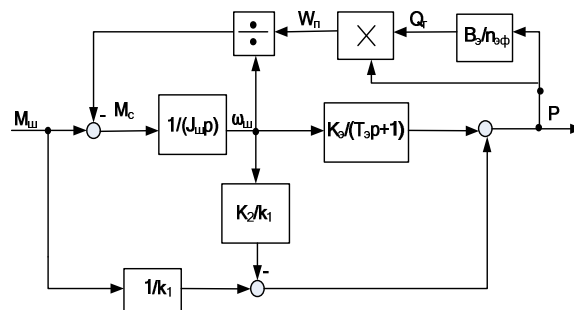


Рис. 2 - Структурная схема привода экструдера с учетом цепи обратной связи

Из структурной схемы видно, что объект обладает нелинейными связями в цепи обратной связи. Для анализа динамики экструдера как объекта управления при малых отклонениях переменных P , $\omega_{ш}$, M_c следует провести линеаризацию уравнений цепи обратной связи. Для этого, можно воспользоваться разложением переменных в ряд Тейлора, представив объект в режиме малых отклонений указанных переменных.

Литература

1. Завгородний, В.К. Механизация и автоматизация переработки пластических масс/ В.К. Завгородний. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1970. – 596 с.: ил.
2. Оборудование для переработки пластмасс: справочное пособие по расчету и конструированию/ под ред. В.К. Завгороднего. – М.: Машиностроение, 1976. – 406 с.
3. Оборудование и основы проектирования заводов резиновой промышленности : Учеб. пособие для вузов / Бекин Н.Г. [и др.] ; под общ. ред. Н.Д. Захарова. – Л. : Химия, 1985. – 504 с
4. Автоматизированный электропривод промышленных установок: учебное пособие для вузов / Г.Б. Онищенко [и др.]; под ред. Г.Б. Онищенко. – М.: РАСХН – 2001. – 520 с.: ил.
5. Басов, Н.И. Расчет и конструирование формующего инструмента для изготовления изделий из полимерных материалов : учеб. для вузов / Н.И. Басов, В.А. Брагинский, Ю.В. Казанков. – М. : Химия, 1991. – 352
6. Ким, В.С. Теория и практика экструзии полимеров : учеб. и учеб. пособия для вузов / В.С. Ким. – М. : Химия, Колос, 2005.—568 с.
7. Орлов, С. П. Повышение эффективности электрооборудования и системы управления экструзионной линии: дис. канд. техн. наук/ С. П. Орлов. – Краснодар, 2005. – 193 с.
8. Вострокнутов, Е.Г. Переработка каучуков и резиновых смесей. Реологические основы, технология, оборудование/ Е.Г. Вострокнутов, М.И. Новиков, В.И. Новиков. – М.: Химия, 1980. – 280 с., ил.
9. Вострокнутов, Е.Г. Реологические основы переработки эластомеров / Е.Г. Вострокнутов, Г.В. Виноградов. – М. : Химия, 1988.—232с.

10. Бернхардт Э. Переработка термопластических материалов: пер. с англ. Р.В. Торнера и др. под ред. Г.В. Виноградова/ Э. Бернхардт. – М.: Госхимиздат, 1962 г. – 748 с., ил.
11. Торнер, Р.В. Теоретические основы переработки полимеров (механика процессов) / Р.В. Торнер. – М. : Химия, 1977.—464с.
12. Ганиев Р. Н. Электропривод экструдера на основе системы векторного управления асинхронным двигателем. – Вестник Казанского технол. ун-та. - №12, Т16, с. 263-265.
13. Тумаева Е. В. Подобие оптимальных зависимостей токов в синхронном двигателе с электромагнитным возбуждением на базе теории обобщенной машины. – Вестник Казанского технол. ун-та. - №2., Т16, С. 158-159.

© Р. Н. Ганиев – к.т.н., доц. каф. электротехники и энергообеспечения предприятий НХТИ КНИТУ, aer-nk@mail.