

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

РАСЧЁТ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе представлен алгоритм расчёта плотности распределения времени ожидания в открытых системах массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди в стационарном режиме функционирования.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

This paper presents an algorithm of the calculation of the distribution density of the waiting time in the open systems of mass service with a polycomponent input stream and a great number of restrictions on the length of the queue in the stationary mode of functioning

В последнее время появляется все большее количество различного рода товаров и услуг, и все чаще возникают проблемы, связанные с организацией пунктов торговли и обслуживания населения. Как отмечалось ранее [1-4] для описания подобных объектов в ряде случаев хорошо подходят модели систем массового обслуживания (СМО) с пуассоновскими потоками заявок. Однако, СМО, встречающиеся в повседневной практике, зачастую представляют собой сложные системы, имеющие во входном потоке заявки разных типов. Следуя [5,6] предположим, что рассматриваемая СМО имеет m обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.

- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;

- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;

- h-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_h . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_h или более требований, вновь поступившая заявка h-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

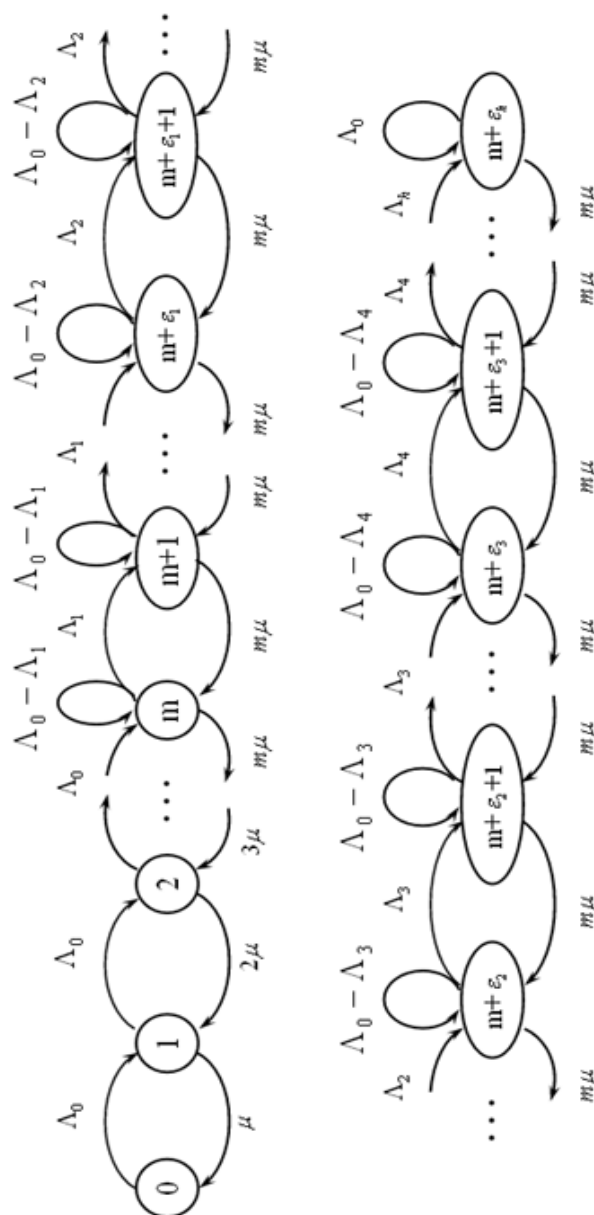


Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

Потоки заявок такого рода будем мы называть поликомпонентными, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным

правилам, - системами дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков [5-15]. Граф состояний и переходов такой СМО приведён на рис.1.

Принятые обозначения:

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \quad \varepsilon_1 = E_1; \quad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \dots$$

$$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^j E_i = \sum_{i=1}^j E_i \quad \text{- ограничения длины очереди}$$

для заявок j-го типа;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^h \lambda_j; \quad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j; \quad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^h \lambda_j; \dots$$

$\Lambda_h = \lambda_h$; где λ_j - интенсивности потоков заявок j-го типа;

$$R_0 = \sum_{j=0}^h \rho_j; \quad R_1 = \sum_{j=1}^h \rho_j; \quad R_2 = \sum_{j=2}^h \rho_j; \dots$$

$$R_h = \rho_h; \quad R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu}, \quad \text{где } \rho_j \text{ - приведенные интен-}$$

сивности потоков заявок j-го типа.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j , суммарные поликомпонентные

потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [16]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим как μ . Очевидно, что в этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m -го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учетом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. С учётом формул, полученных для вероятностей стационарных состояний, а также числовых характеристик и функции распределения времени ожидания, приведенных в работах [10-15], найдём общую зависимость плотности распределения времени ожидания обслуживания вновь прибывшей заявкой от параметров входного потока заявок в стационарном режиме работы системы.

$$f_{\text{ож}}(t) = \frac{dF_{\text{ож}}(t)}{dt} = m\mu e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \times$$

$$\times \left\{ \frac{R_1}{m-R_1} \left[e_{\varepsilon_1-1}(R_1\mu t) - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} e_{\varepsilon_1-1}(m\mu t) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m-R_i} \left[\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} e_{\varepsilon_{i-1}-1}(m\mu t) + \right. \right.$$

$$\left. + \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[e_{\varepsilon_{i-1}}(R_i\mu t) - e_{\varepsilon_{i-1}-1}(R_i\mu t) \right] - \right.$$

$$\left. - \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} e_{\varepsilon_{i-1}}(m\mu t) \right\} - e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \left\{ \frac{R_1}{m-R_1} \times \right.$$

$$\times \left[R_1\mu e_{\varepsilon_1-2}(R_1\mu t) - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} m\mu e_{\varepsilon_1-2}(m\mu t) \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m-R_i} \left[\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} m\mu e_{\varepsilon_{i-1}-2}(m\mu t) + \right.$$

$$+ \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} R_i\mu \left[e_{\varepsilon_{i-2}}(R_i\mu t) - e_{\varepsilon_{i-1}-2}(R_i\mu t) \right] -$$

$$\left. - \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} m\mu e_{\varepsilon_{i-2}}(m\mu t) \right\} = e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \times$$

$$\times \left\{ \frac{R_1 m \mu}{m-R_1} \left[e_{\varepsilon_1-2}(R_1\mu t) \left(1 - \frac{R_1}{m} \right) + \frac{(R_1\mu t)^{E_1-1}}{(E_1-1)!} - \right. \right.$$

$$\left. - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{(m\mu t)^{E_1-1}}{(E_1-1)!} \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^h \frac{R_i m \mu}{m-R_i} \left[\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_{i-1}-1}}{(\varepsilon_{i-1}-1)!} + \right.$$

$$+ \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[e_{\varepsilon_{i-2}}(R_i\mu t) \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) + \right.$$

$$+ \frac{(R_i\mu t)^{\varepsilon_{i-1}-1}}{(\varepsilon_{i-1}-1)!} - e_{\varepsilon_{i-1}-2}(R_i\mu t) \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) -$$

$$\left. - \frac{(R_i\mu t)^{\varepsilon_{i-1}-1}}{(\varepsilon_{i-1}-1)!} \right] - \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_i-1}}{(\varepsilon_i-1)!} \right\} =$$

$$= e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \left\{ R_1\mu e_{\varepsilon_1-1}(R_1\mu t) + \right.$$

$$+ \sum_{i=2}^h \frac{R_i m \mu}{m-R_i} \left[\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \frac{(R_i\mu t)^{\varepsilon_{i-1}-1}}{(\varepsilon_{i-1}-1)!} \frac{R_i}{m} + \right.$$

$$+ \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[e_{\varepsilon_{i-2}}(R_i\mu t) \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) + \right.$$

$$+ \frac{(R_i\mu t)^{\varepsilon_{i-1}-1}}{(\varepsilon_{i-1}-1)!} - e_{\varepsilon_{i-1}-2}(R_i\mu t) \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) -$$

$$\left. - \frac{(R_i\mu t)^{\varepsilon_{i-1}-1}}{(\varepsilon_{i-1}-1)!} \right] - \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \frac{(R_i\mu t)^{\varepsilon_i-1}}{(\varepsilon_i-1)!} \frac{R_i}{m} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \{ R_i \mu e_{\varepsilon_i-1}(R_i \mu t) + \\
&+ \sum_{i=2}^h \frac{R_i m \mu}{m - R_i} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \times \\
&\times [e_{\varepsilon_i-1}(R_i \mu t) - e_{\varepsilon_{i-1}-1}(R_i \mu t)] \} = \\
&= e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \{ R_i \mu e_{\varepsilon_i-1}(R_i \mu t) + \\
&+ \sum_{i=2}^h R_i \mu \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} [e_{\varepsilon_i-1}(R_i \mu t) - e_{\varepsilon_{i-1}-1}(R_i \mu t)] \} = \\
&= e^{-m\mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \{ \Lambda_i e_{\varepsilon_i-1}(\Lambda_i t) + \\
&+ \sum_{i=2}^h \Lambda_i \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} [e_{\varepsilon_i-1}(\Lambda_i t) - e_{\varepsilon_{i-1}-1}(\Lambda_i t)] \}.
\end{aligned}$$

Результаты расчётов, полученные в настоящей работе, продолжают цикл работ [10-15, 17-18], опубликованных авторами ранее, и могут быть весьма полезны при проектировании и эксплуатации достаточно широкого класса объектов и систем, работающих по принципу систем и сетей массового обслуживания.

Литература

1. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 4, 78-85 (2006);

2. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **14**, 5, 893-896 (2007);
3. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **15**, 6, 1090-1091 (2008);
4. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 5, С. 154-161 (2011);
5. А.С. Титовцев, Дисс. канд. техн. наук, КНИТУ, Казань, 2011. 143 с.;
6. А.С. Титовцев, *Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 132 с.;
7. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **15**, 1, С. 148-152 (2012);
8. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **15**, 6, С. 201-202 (2012);
9. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **15**, 8, С. 337-340 (2012);
10. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 6, С. 248-252 (2013);
11. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Наука в Центральной России*, 4, С. 5-8 (2013);
12. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 11, С. 255-257 (2013);
13. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 18, С. 282-286 (2013);
14. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 23, С. 242-244 (2013);
15. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **17**, 4, С. 307-312 (2014);
16. А.Я. Хинчин, *Работы по математической теории массового обслуживания*. М., ГИФМЛ, 1963. 236 с.;
17. А.П. Кирпичников, *Прикладная теория массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского гос. ун-та, 2008. 112 с.;
18. А.П. Кирпичников, *Методы прикладной теории массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского университета, 2011. 200 с.

© А. П. Кирпичников – д-р физ.-мат. наук, зав. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, kirpichnikov@kstu.ru; А. С. Титовцев – канд. тех. наук, доцент каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, notna6683@mail.ru.