

Л. Е. Шувалова, М. В. Ксенафонтова

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ

Ключевые слова: многогранник, сечение, площадь, алгоритм.

В статье рассматривается задача построения и нахождения площади сечения многогранника. Полученный в работе алгоритм позволяет находить площади любых сечений многогранников координатным способом.

Keywords: polytope, section, size, algorithm.

The article considers the problem of drawing and calculating the cross-sectional area of polyhedron. Obtained algorithm is able to calculate the area of any polyhedron sections using coordinate method.

Стереометрические задачи на нахождение площади сечения многогранников часто предлагаются на вступительных экзаменах и олимпиадах во многих вузах, также периодически встречаются в вариантах заданий на Едином государственном экзамене по математике. Их решение нередко вызывает у учащихся некоторые трудности, поскольку эти задачи связаны с построением фигур, с нахождением сечений, удовлетворяющих определенным условиям. Каждый шаг построения должен быть теоретически обоснован и описан, что требует хорошего знания законов стереометрии и планиметрии.

Уместно отметить, что по методам решения таких задач имеется достаточно много хороших работ. Среди них наиболее интересной нам представляется статья С.В.Буфеева [1], где рассмотрены различные способы вычисления площади сечения многогранника. В предложенных примерах статьи везде требуется определение местонахождения точек сечения на ребрах многогранника. В разобранных задачах используются теоремы Фалеса, Менелая признаки подобия треугольников, понятие векторного произведения векторов.

При решении широкого круга задач, наряду с классическими способами оказываются достаточно эффективными координатно-векторные методы. Задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми; угла между прямой и плоскостью; угла между плоскостями, расстояний от точки до прямой и до плоскости и др., часто громоздко решаются обычными методами, основанными на чисто геометрических рассуждениях, но при помощи координатно-векторного исчисления решение значительно упрощается.

В рамках данной статьи мы приводим пример математической модели вычисления площади сечения многогранника с параллельным погружением в теорию. Для этого предусмотрены небольшие блоки теоретического материала [2].

Решение любой стереометрической задачи начинается с построения качественного чертежа пространственной фигуры, поэтому необходимо усвоить принцип и технику построения – это и будет первым шагом предлагаемого нами алгоритма. Для развития навыков аккуратного построения можно порекомендовать книгу Балаяна Э.Н. [3]. Предлагаемая литература содержит более 600 разно-

уровневых задач по всем темам стереометрии на готовых чертежах.

Каждый многогранник имеет свою особенность. Приведем, например, схему построения правильной пирамиды:

- 1) строим основание пирамиды;
- 2) находим центр основания (для треугольной - точка пересечения медиан, для четырехугольной - точка пересечения диагоналей);
- 3) из центра восстанавливаем высоту и соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

После того, как многогранник построен, надо привязать его к прямоугольной системе координат. При этом необходимо расположить геометрические фигуры так, чтобы как можно больше вершин находилось на осях координат. Примеры расположения многогранников и координат их вершин, наиболее часто используемых в задачах, можно найти в пособии [4].

Далее, важным этапом алгоритма является построение сечения с указанными в задаче свойствами. При построении сечений многогранников придерживаемся следующих правил.

- 1) Проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости.
- Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.
- 2) Заметим, что при построении сечений многогранников плоскостью наиболее часто применяют метод следов и метод переноса секущей плоскости [4].

Находим точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой одной из граней.

- 3) Если, противоположные грани в многограннике параллельны, то секущая плоскость, согласно свойству параллельных плоскостей будет пересекать эти грани по параллельным прямым.

Далее, рассмотрим пример решения задачи координатным методом.

Пример 1. Найдите площадь сечения единичного куба плоскостью, проходящей через его вершину А и центры F и E граней (BCC₁) и (CDD₁) соответственно.

Решение. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки F, E и A.

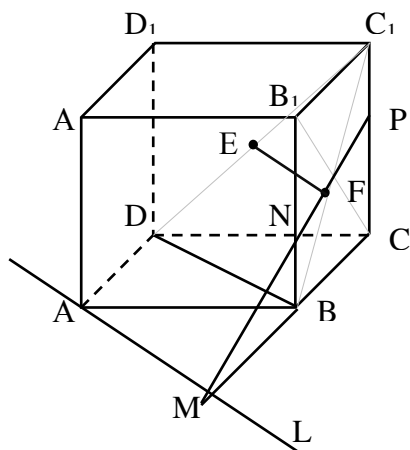


Рис. 1

- 1) Соединим точки E и F, $EF \parallel BD$.
- 2) Проведем прямую L: $A \in L, L \parallel DB$.
- 3) M-точка пересечения прямых L и BC.: $M = L \cap BC$.
- Следовательно, прямая FM является линией пересечения плоскости сечения и боковой грани (BCC_1) .
- 4) $MF \cap BB_1 = N, MF \cap CC_1 = P$ (рис.1).

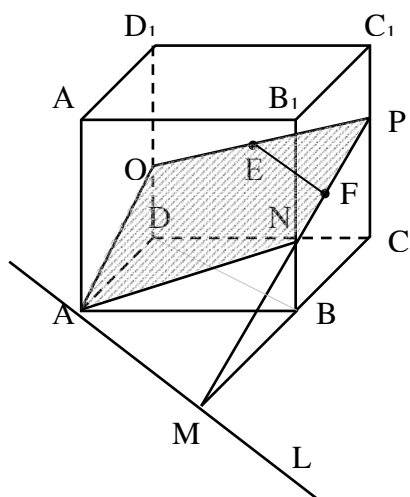


Рис. 2

- 5) Проведем прямую PE. $PE \cap DD_1 = Q$.
- 6) Соединим A и Q. $ANPQ$ - искомое сечение (рис.2).

Впишем прямоугольную систему координат в указанный куб.

Пусть начало координат находится в т. A, направление координатных осей показано на рис.3.

Тогда, точки принадлежащие плоскости сечения, имеют координаты: $A(0,0,0)$, $F(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, E

$(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

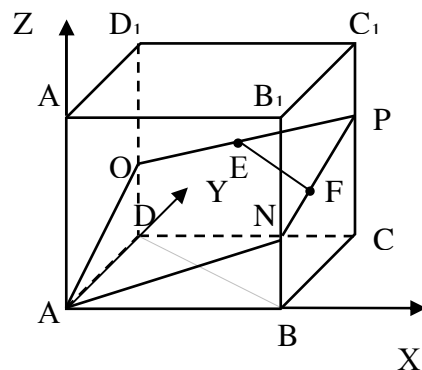


Рис. 3

Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти три точки: $ax+by+cz+d=0$. Так как координаты точек A, F, E удовлетворяют этому уравнению, кроме того, секущая плоскость проходит через начало координат, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} d=0, \\ a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=0, \\ \frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c=0. \end{cases}$$

Пусть, $a=1$, тогда $b=1$, $c=-3$. Уравнение плоскости сечения будет иметь вид:

$x+y-3z=0$. Используя это уравнение, найдем координаты точек пересечения прямых BB_1, CC_1, DD_1 с плоскостью сечения.

$$N(1,0,Z_N): 1+0-3Z_N=0, Z_N=\frac{1}{3};$$

$$P(1,1,Z_P): 1+1-3Z_P=0, Z_P=\frac{2}{3};$$

$$Q(0,1,Z_Q): 0+1-3Z_Q=0, Z_Q=\frac{1}{3}.$$

После того, как местоположение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника найдено, нужно определить, каким способом искать его площадь. Какой вариант является наиболее удобным, зависит от условий задачи.

В нашем случае, получившийся четырехугольник является ромбом. Стороны равны $AN=NP=PQ=QA=\frac{\sqrt{10}}{3}$, диагонали перпендикулярны.

В последнем можно убедиться, найдя скалярное

произведение векторов $\overrightarrow{AP}\left\{1,1,\frac{2}{3}\right\}$ и

$\overrightarrow{NQ}\{1,-1,0\}$:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{сечения}} &= \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{NQ}| = \\ \text{Отсюда} \quad &= \frac{1}{2} \sqrt{1+1+\frac{4}{9}} \sqrt{1+1+0} = \frac{\sqrt{11}}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, алгоритм математической модели вычисления площади сечения имеет вид:

- 1) Строится многогранник и сечение, исходя из условий поставленной задачи;
- 2) Пространственная фигура вписывается в прямоугольную систему координат;
- 3) Находятся координаты трех точек принадлежащих плоскости сечения;
- 4) Составляется уравнение плоскости, проходящей через три известные точки;
- 5) Определяются координаты точек пересечения ребер многогранника с плоскостью сечения.

Здесь следует отметить, что если ребра наклонены к плоскости, то можно составить параметрические уравнение прямых, а затем уже найти координаты точек пересечения.

- 6) Вычисляется площадь сечения.

Если в сечении оказывается четырехугольник, то площадь находится по известной формуле

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi,$$

где угол φ можно найти, используя скалярное произведение диагональных векторов. Если сечение есть сложный многоугольник, то его всегда можно разбить диагональными сечениями на треугольники или четырехугольники.

Рассмотренную математическую модель вычисления площади сечения можно считать универсальной [5]. Она подходит к большинству задач на вычисление площади сечений.

Предложенный алгоритм математической модели способствует передаче учебной информации в оптимальном соответствии с целями и содержанием учебной программы, создает условия для реализации познавательного поиска, самовыражения и творчества, содействует активизации индивидуальной самообразовательной деятельности учащихся [6].

Литература

1. Буфеев С.В. Вычисления площади сечения многогранника разными способами / Математика в школе. - 2008. - №9.
2. Бакеева Л.В., Макусева Т.Г., Шувалова Л.Е. Индивидуально-ориентированная подготовка студентов к интернет-тестированию по математике // Вестник Казанского технологического университета. 2012. Т.15, №18. - С 294-298.
3. Балаян Э.Н. Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ 10-11 классы / Э.Н.Балаян. - Ростов н/д : Феникс, 2013-217 с.
4. Корянов А.Г., Прокофьева А.А. Многогранники: типы задач и методы их решения./akoryanov@mail.ru, aaprokof@yandex.ru.
5. Бакеева Л.В., Математические дисциплины в аспекте многомерных связей // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т.16, №12. - С 293-296.
6. Макусева, Т.Г. Методология, теория и практика индивидуально-ориентированного обучения в вузе: монография / Т.Г. Макусева. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».