УДК 544.35.03:665.7

О. Р. Каратаев, С. В. Анаников

АДСОРБЦИЯ В НЕПОДВИЖНОМ СЛОЕ АДСОРБЕНТА С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ И ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Ключевые слова: адсорбция, химическая реакция, преобразование Лапласа, оригинал, изображение.

В статье представлена теоретическая одномерная модель динамики адсорбции в неподвижном слое с учетом химической реакции первого порядка. Рассматривается общий случай, когда сопротивление массопереносу сосредоточено как во внешней, так и во внутренней фазах. Решения получены методом преобразования Лапласа. Они могут быть распространены на аналогичные задачи при кусочно- линейной аппроксимации нелинейной изотермы адсорбции.

Keywords: adsorption, chemical reaction, transformation of Laplace, original, representation.

In the article is descrebed theoretical model of adsorption dinamics accompaning chemical first order reaction in direction one coordinate axis parallel of cross section motionless lager of absorbent. Jt is taked into consideration general case when resistance by masstransfer distribute betwen internal and external of phases. Solution of task was obtained by method transformation of Laplaceand can be disseminate on analogy tasksat part-linear approximation unlinear isotherm of adsorption at chemical first order reaction.

В работе решается задача динамики адсорбции в неподвижном слое адсорбента, учитывающая продольное перемешивание и химическую реакцию первого порядка. Статья продолжает тему развитую в [1, 2]. Отличие от указанных работ заключается в постановочной части, в которой одновременно учитываются как продольное перемешивание, так и сток вещества за счет химической реакции (отрицательный источник вещества). Другими словами, настоящую работу можно рассматривать как обобщение задач [1, 2].

В связи с изложенным здесь отпадает необходимость в строгом формулировании физической части работы и появляется возможность сразу записать уравнения математической модели (математическая постановка)

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau} + W \frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C(x,\tau)}{\partial x^2} - K_c C(x,\tau), \quad (1)$$

$0 \le x < \infty,\ 0 < \tau < \infty,$

$$\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau} = K\left[C(x,\tau) - C^*(C_a)\right], \quad 0 \le x < \infty, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (2)$$

$$C(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \infty, \quad (3)$$

$$C_a(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \infty, \quad (4)$$

$$C(0,\tau) = C_0, \qquad 0 \le \tau < \infty, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C(\infty,\tau)}{\partial x} = 0, \qquad 0 \le \tau < \infty. \quad (6)$$

Уравнение изотермы адсорбции

$$C_a(x,\tau) = AC^*(C_a) - B. \quad (7)$$

Здесь A и B - константы, $C_a(x,\tau)$ - концентрация адсорбированного вещества в сорбенте в сечении x в момент времени τ; $C(x,\tau)$ - концентрация адсорбтива в потоке на расстоянии x в момент времени τ; W - скорость потока; K - коэффициент массообмена; K_c - константа скорости реакции; $\delta = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$ - коэффициент; ε - доля свободного сечения адсорбента (постоянная по объему порозность неподвижного слоя); C^* - концентрация целевого компонента в потоке равновесная со средним содержанием адсорбитива C_a в слое; D_L - коэффициент продольной диффузии (перемешивания)

Первые два слагаемых в левой части уравнения (1) представляют собой скорость изменения массы целевого компонента в зазорах между частицами и внутри частиц соответственно. Третье слагаемое соответствует приращению массы целевого компонента за счет конвективного переноса с потоком. Первое и второе слагаемые в правой части (1) учитывают изменение массы целевого компонента за счет молекулярной диффузии (продольное перемешивание) и протекания химической реакции соответственно.

Краевые условия (3) - (5) выражают следующее.

В начальном сечении неподвижного слоя в произвольный момент времени τ концентрация целевого компонента постоянна и равна C_0: условие (5); в начальный момент времени $\tau = 0$ неподвижный слой свободен от адсорбируемого вещества: условия (3), (4).

Условие (6) является дополнительным условием на бесконечности, служащим для замыкания системы уравнений (1) - (2), поскольку в (1) представлена вторая производная концентрации по времени, вследствие учета продольного перемешивания.

Преобразования (2) с учетом (7), а также (1) с учетом (2) и (7) позволяют записать

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} + W \frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C(x,\tau)}{\partial x^2} - \delta K\left[C(x,\tau) - \frac{C_a(x,\tau)}{A} - \frac{B}{A}\right] - K\,C(x,\tau),$$

$$0 \le x < \infty, 0 < \tau < \infty, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau} = K\left[C(x,\tau) - \frac{C_a(x,\tau)}{A} - \frac{B}{A}\right],$$

$$0 \le x \le \infty, 0 \le \tau >\le \infty. \qquad (2а)$$

Задача (1а), (2а), (3) - (6) решается с использованием одностороннего преобразования Лапласа по переменной τ [3]

$$C(x,\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(x,s) = \int_0^\infty C(x,\tau) e^{-s\tau} d\tau, \qquad (8)$$

$$C_a(x,\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \Phi(x,s) = \int_0^\infty C_a(x,\tau) e^{-s\tau} d\tau, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(x,s) - C(x,0), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\Phi(x,s) - C_a(x,0). \qquad (11)$$

Здесь знак $\circ\!\!-\!\!\bullet$ обозначает переход от оригинала к изображению и наоборот.

После преобразований получена краевая задача для обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка по переменной x

$$\frac{d^2F(x,s)}{dx^2} - L\frac{dF(x,s)}{dx} - M\,F(x,s) = -N, \qquad (1б)$$

где $L = \dfrac{W}{D_L}$, $M = \dfrac{\left(s + \delta k + k_c - \dfrac{\delta k^2}{As + k}\right)}{D_L}$,

$$N = \frac{\delta K B}{D_L(As + k)},$$

$$F(0,s) = \frac{C_0}{s}, \qquad (5а)$$

$$\frac{dF(\infty,s)}{dx} = 0 \qquad (6а)$$

и алгебраическое уравнение

$$\Phi(x,s) = \frac{k}{s + \dfrac{k}{A}} F(x,s) - \frac{kB}{A}\frac{1}{s(s + \dfrac{k}{A})}. \qquad (2б)$$

Здесь значок s выполняет роль параметра.

Общее решение (1б) при условиях (5а), (6а) имеет вид

$$F(x,s) = \left(\frac{C_0}{s} - \frac{N}{M}\right)\times$$

$$\times exp\left[-\frac{-L + \sqrt{L^2 + 4M}}{2}x\right] + \frac{N}{M}. \qquad (12)$$

Если заменить константы L, M, N их значениями в соотношении (12) и ввести другие, более удобные для обратного преобразования Лапласа, константы $a, a_0, a_1, \alpha, \beta, \gamma,$ то можно получить

$$F(x,s) = \left(\frac{C_0}{s} - \frac{B\delta\gamma}{s^2 + a_1 s + a_0}\right) e^{\frac{Wx}{2a^2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s + \alpha - \frac{\beta}{s+\gamma}}} + \frac{B\delta\gamma}{s^2 + a_1 s + a_0}, \qquad (13)$$

$$\Phi(x,s) = \frac{k}{s+\gamma}\left[\left(\frac{C_0}{s} - \frac{B\delta\gamma}{s^2 + a_1 s + a_0}\right) e^{\frac{Wx}{2a^2}} \times\right.$$

$$\left.\times e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s + \alpha - \frac{\beta}{s+\gamma}}} + \frac{B\delta\gamma}{s^2 + a_1 s + a_0}\right] - \frac{B\gamma}{s(s+\gamma)}, \qquad (14)$$

где $a = \sqrt{D_L}$, $a_0 = \gamma k_C$, $a_1 = (k\delta + \gamma + k_C)$,

$\alpha = \dfrac{W^2}{4a^2} + k\delta + k_C$, $\beta = \delta\gamma k$, $\gamma = \dfrac{k}{A}$.

Прежде чем перейти к оригиналам функции $F(x,s), \Phi(x,s)$ преобразуются следующим образом

$$F(x,s) = \left[\frac{C_0}{s} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s + \gamma - \frac{\beta}{s+\gamma}}} - \frac{B\delta\gamma s}{s^2 + a_1 s + a_0}\times\right.$$

$$\left.\times \frac{1}{s} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s + \gamma - \frac{\beta}{s+\gamma}}}\right] e^{\frac{Wx}{2a^2}} + \frac{B\delta\gamma}{s^2 + a_1 s + a_0}, \qquad (15)$$

$$\Phi(x,s) = \left[\frac{kC_0}{s(s+\gamma)} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s + \gamma - \frac{\beta}{s+\gamma}}} -\right.$$

$$\left.- \frac{kB\delta\gamma}{s+\gamma}\frac{s}{s^2 + a_1 s + a_0}\frac{1}{s} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{s + \gamma - \frac{\beta}{s+\gamma}}}\right] e^{\frac{Wx}{2a^2}} +$$

$$+ \frac{kB\delta\gamma}{s+\gamma}\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} - \frac{B\gamma}{s(s+\gamma)}. \qquad (16)$$

Переход в пространство оригиналов от изображений (15), (16) будет осуществляться разложением в ряды, использованием основных (табличных) разложений и известных правил и теорем операционного исчисления.

Применяя табличное разложение $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ [4], которое сходится во всей комплексной плоскости ($R = \infty, R$ - радиус сходимости), разложение рассматриваемой экспоненциальной функции запишется в виде

$$e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\alpha + s - \frac{\beta}{s+\gamma}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha + s - \frac{\beta}{s+\gamma}\right)^{\frac{n}{2}}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{n!} \equiv$$

$$\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha + s - \frac{\beta}{s+\gamma}\right)^{\frac{n}{2}}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{n!}. \qquad (17)$$

Вариант записи разложения при суммировании от $n = 1$ более удобен для последующих операций с изображениями.

Все дальнейшие преобразования будут опираться на разложение, которое с учетом (17), принимает вид

$$\frac{1}{s}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\alpha+s-\frac{\beta}{s+\gamma}}}=\frac{1}{s}-\left[\frac{\alpha}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{\beta}{s^2(s+\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{x}{a}+$$

$$+\left[\frac{\alpha}{s}+1-\frac{\beta}{s(s+\gamma)}\right]\left(\frac{x}{a}\right)^2\frac{1}{2}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{n!}\left[\frac{\alpha}{s^{\frac{2}{n}}}+\frac{s}{s^{\frac{2}{n}}}-\frac{\beta}{s^{\frac{2}{n}}(s+\gamma)}\right]^{\frac{n}{2}}. \quad (18)$$

Теперь переход к оригиналу можно выполнить последовательно применительно к каждому члену данного разложения.

Этим обеспечивается и единый подход при возврате к оригиналам для всех членов, стоящих под знаком суммы.

Для первого и второго членов разложения (18) переход в пространство оригиналов выполняется непосредственно с использованием таблиц изображений [3, 5]. Причем, для второго члена оригинал находится по изображению, заключенному в квадратные скобки.

Квадратная скобка в выражении для третьего члена разложения (18) записывается так

$$\left[\frac{\alpha}{s}+1-\frac{\beta}{s(s+\gamma)}\right]=s\left[\frac{\alpha}{s^2}+\frac{1}{s}-\frac{\beta}{s^2(s+\gamma)}\right]=s\,f(s).$$

При нахождении оригинала для этого изображения можно, используя свойство линейности для изображения и теорему о дифференцировании оригинала [3, 4]

$$s\,f(s)-F(0)\bullet\!\!-\!\!\circ\,\frac{dF(\tau)}{d\tau},$$

получить согласно таблиц изображений

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau}=\alpha-\frac{\beta}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma\tau}\right).$$

Тогда

$$\left[\frac{\alpha}{s}+1-\frac{\beta}{s(s+\gamma)}\right]-1\bullet\!\!-\!\!\circ\,\alpha-\frac{\beta}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma\tau}\right). \quad (19)$$

Переход к оригиналу для каждого из изображений, стоящих в общей формуле члене ряда под знаком суммы, выполняется отдельно.

Оригинал первого изображения находится непосредственно, если учесть, что [3, 4]

$$\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}}\bullet\!\!-\!\!\circ\,\frac{\tau^{\frac{2}{n}-1}}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\left(Re\frac{2}{n}>0; Re\,s>0\right). \quad (20)$$

Оригинал второго изображения определяется также с применением теоремы о дифференцировании оригинала

$$\frac{s}{s^{\frac{2}{n}}}=s\left(\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}}\right)-0\bullet\!\!-\!\!\circ\,-\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\frac{1}{\tau^{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}}. \quad (21)$$

Оригинал третьего изображения, стоящего в квадратных скобках под знаком суммы, определяется путем разложения в ряд выражения $\frac{1}{s+\gamma}$, представлением в виде ряда выражения $\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}(s+\gamma)}$ и последующим переходом к оригиналу.

Разложение выражения $\frac{1}{s+\gamma}$ возможно, в зависимости от области сходимости параметра s, осуществить в двух вариантах

1. По первому варианту можно получить [4]

$$\frac{1}{s+\gamma}=(s+\gamma)^{-1}=\gamma^{-1}\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)^{-1}=$$

$$=\gamma^{-1}\left[1-\frac{s}{\gamma}+\left(\frac{s}{\gamma}\right)^2-\left(\frac{s}{\gamma}\right)^3+\ldots+(-1)^k\left(\frac{s}{\gamma}\right)^k\right]=$$

$$=\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{s}{\gamma}\right)^k=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{s}{\gamma}\right)^k,$$

$$|s|<|\gamma|, \gamma\neq 0. \quad (22)$$

Здесь фактически представлена правильная часть ряда Лорена при разложении функции $\frac{1}{s+\gamma}$.

Данное разложение получено с использованием стандартного разложения бинома Ньютона [4, 6].

Тогда согласно (22) можно записать

$$\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}(s+\gamma)}=\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}}\frac{1}{(s+\gamma)}=$$

$$=\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\gamma^{k+1}}s^k, |s|<|\gamma|, \gamma\neq 0. \quad (23)$$

Переход к оригиналу в данном случае может быть выполнен с использованием правила Хевисайда [7]:

если $f(s)=s^{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^{kq}$,

где ε и q - вещественные числа ($q>0$), то

$$F(\tau)=\frac{1}{\tau^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Gamma(-kq-\varepsilon)}\tau^{-kq};$$

$\Gamma(-kq-\varepsilon)$ - гамма функция.

Здесь необходимо вычеркнуть слагаемые для которых $\frac{1}{\Gamma(-kq-\varepsilon)}=0$, то есть, если $kq+\varepsilon$ является целым положительным числом или нолем.

Для нашего случая согласно (23) по Хевисайду: $q=1$; $\varepsilon=-\frac{2}{n}$; $kq+\varepsilon$ равно целому положительному числу или нолю.

Поэтому можно записать

$$\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}}\times\frac{1}{(s+\gamma)} \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{\gamma\tau^{1-\frac{2}{n}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(-k+\frac{2}{n}\right)}\frac{1}{(\gamma\tau)^k},\gamma\tau>1,\gamma\neq 0. \qquad (24)$$

По второму варианту разложения будет [4]

$$\frac{1}{s+\gamma}=\frac{1}{s}\frac{1}{\left(1+\frac{\gamma}{s}\right)}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{\gamma}{s}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{\gamma}{s}+\left(\frac{\gamma}{s}\right)^2-\left(\frac{\gamma}{s}\right)^3+\ldots+(-1)^k\left(\frac{\gamma}{s}\right)^k\right]=$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{\gamma}{s^2}+\frac{\gamma^2}{s^3}-\frac{\gamma^3}{s^4}+\ldots+$$

$$+(-1)^k\frac{\gamma^k}{s^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\gamma^k}{s^{k+1}},|s|>|\gamma|. \qquad (25)$$

Здесь представлена главная часть ряда Лорана для разложения функции $\frac{1}{s+\gamma}$. При этом также использовалось стандартное разложение бинома Ньютона.

И, наконец, согласно (25)

$$\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}(s+\gamma)}=\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}}\frac{1}{(s+\gamma)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\gamma^k}{s^{k+1+\frac{2}{n}}},|s|>|\gamma|. \qquad (26)$$

Переход от изображения (26) к оригиналу выполняется с использованием соотношения (20) по соответствию

$$\frac{1}{s^{k+1+\frac{2}{n}}}\bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{\tau^{k+\frac{2}{n}}}{\Gamma\left(k+1+\frac{2}{n}\right)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}(s+\gamma)}\bullet\!\!-\!\!\circ\ \tau^{\frac{2}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\gamma\tau)^k}{\Gamma\left(k+1+\frac{2}{n}\right)},\gamma\tau<1. \qquad (27)$$

Таким образом, разложение в ряд Лорана функции $\frac{1}{s^{\frac{2}{n}}(s+\gamma)}$ с применением либо правильной, либо главной частей разложения, позволяет получить оригиналы для любого диапазона изменения времени τ $[\gamma\tau<1,\gamma\tau>1]$.

На основании (18) - (21), (24), (27) можно записать в обозначениях удобных для дальнейших вычислений

$$f(s)=\frac{1}{s}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\alpha+s-\frac{\beta}{s+\gamma}}}\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ F(\tau)=1-\frac{x}{a}\sqrt{\alpha\tau+1-\frac{\beta}{\gamma^2}e^{-\gamma\tau}-\frac{\beta\tau}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma^2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\left[\alpha-\frac{\beta}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma\tau}\right)\right]+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{n!}\left\{\frac{\alpha}{\tau^{1-\frac{2}{n}}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}-\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\frac{1}{\tau^{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}}-\right.$$

$$\left.-\beta\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\gamma\tau^{1-\frac{2}{n}}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(-K+\frac{2}{n}\right)}\frac{1}{(\gamma\tau)^k}\,npu\,\gamma\tau>1,\\ \tau^{\frac{2}{n}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\gamma\tau)^k}{\Gamma\left(k+1+\frac{2}{n}\right)}npu\,\gamma\tau<1.\end{array}\right]^{\frac{n}{2}}\right\}. \qquad (28)$$

Теперь следует найти такие соответствия [3]:

$$f_1(s)=\frac{s}{s^2+a_1s+a_0}\bullet\!\!-\!\!\circ\ F_1(\tau)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}sin\left(\sqrt{a_2}\,\tau+\tau_1\right),\tau_1=\\ =arctg\dfrac{\sqrt{a_2}}{-\frac{a_1}{2}}npu\,a_2>0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{-\frac{a_2}{a_0}}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}sh\left(\sqrt{a_2}\,\tau+\tau_1\right),\tau_1=\\ =Arth\dfrac{\sqrt{-a_2}}{-\frac{a_1}{2}}npu\,a_2<0.\end{array}\right. \qquad (29)$$

$$f_2(s)=\frac{1}{s+\gamma}\bullet\!\!-\!\!\circ\ F_2(\tau)=e^{-\gamma\tau}. \qquad (30)$$

$$f_3(s)=\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\bullet\!\!-\!\!\circ\ F_3(\tau)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}sin\sqrt{a_2}\,\tau\ \ npu\ \ a_2>0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{-a_2}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}sh\sqrt{-a_2}\,\tau\ \ npu\ \ a_2<0.\end{array}\right. \qquad (31)$$

Здесь обозначено: $a_2=a_0-\frac{a_1^2}{4}$.

Затем необходимо выполнить свертку следующих функций [3, 4]:

$$f_4(s)=f(s)f_1(s)\bullet\!\!-\!\!\circ\ F(\tau)*F_1(\tau)=F_4(\tau)=$$

$$=\int_0^\tau F(t)F_1(\tau-t)dt; \quad (32)$$

$$f(s)f_2(s)\bullet\!\!-\!\!\circ\; F(\tau)*F_2(\tau)=\int_0^\tau F(t)F_2(\tau-t)dt=$$

$$=\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}F(t)dt; \quad (33)$$

$$f_2(s)f_4(s)\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\; F_2(\tau)*F_4(\tau)=\int_0^\tau F_2(\xi)F_4(\tau-\xi)d\xi=$$

$$=\int_0^\tau e^{-\gamma\xi}\left[\int_0^{\tau-\xi}F(t)F_1(\tau-t)dt\right]d\xi; \quad (34)$$

$$f_2(s)f_3(s)\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\; F_2(\tau)*F_3(\tau)=\int_0^\tau F_2(\tau-t)F_3(t)dt=$$

$$=\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}F_3(t)dt. \quad (35)$$

Прежде чем записать окончательное решение исходной задачи можно выполнить свертку в соотношении (35), то есть вычислить интеграл, и получить законченное аналитическое выражение для свертки.

Согласно (31) и (35) следует записать

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\begin{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{a_2}}e^{-\frac{a_1 t}{2}}\sin\sqrt{a_2}t\ \text{при}\, a_2>0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a_2}}e^{-\frac{a_1 t}{2}}sh\sqrt{-a_2}t\ \text{при}\, a_2<0\end{Bmatrix}dt. \quad (36)$$

Первый интеграл в (36) при $a_2>0$ вычисляется по соотношению [6, 8]

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

$$\frac{e^{-\gamma\tau}}{\sqrt{a_2}}\int_0^\tau e^{\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)t}\sin\sqrt{a_2}\,t\,dt=e^{-\gamma\tau}\times \quad (37)$$

$$\times\frac{\left\{e^{\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\tau}\left[\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\sin\sqrt{a_2}\tau-\sqrt{a_2}\cos\sqrt{a_2}\tau\right]+\sqrt{a_2}\right\}}{\sqrt{a_2}\left(\gamma^2-a_1\gamma+a_0\right)}.$$

Второй интеграл в (36) при $a_2<0$ - по соотношению [8]

$$\int e^{ax}sh(bx+C)dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}\times$$

$$\times\left[a\,sh(bx+C)-b\,ch(bx+C)\right],a^2\neq b^2.$$

$$\frac{e^{-\gamma\tau}}{\sqrt{-a_2}}\int_0^\tau e^{\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)t}sh\sqrt{-a_2}\,t\,dt=$$

$$=\frac{e^{-\gamma\tau}}{\sqrt{-a_2}\left(\gamma^2-a_1\gamma+a_0\right)}\left\{e^{\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\tau}\left[\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times sh\sqrt{-a_2}\tau-\sqrt{-a_2}\,ch\sqrt{-a_2}\tau\right]+\sqrt{-a_2}\right\}. \quad (38)$$

Осталось найти оригинал от последнего изображения в правой части соотношения (16) [3, 5]

$$\frac{1}{s(s+\gamma)}\bullet\!\!-\!\!\circ\;\frac{1}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma\tau}\right). \quad (39)$$

Наконец на основании (15), (16), (28), (29), (31) - (34), (37) - (39) можно записать окончательное решение в оригиналах для соответствующих концентраций

$$F(x,s)\bullet\!\!-\!\!\circ\; C(x,\tau)=$$

$$=\left[C_0F(\tau)-B\delta\gamma\int_0^\tau F(t)F_1(\tau-t)dt\right]e^{\frac{Wx}{2a^2}}+$$

$$+B\delta\gamma\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a_2}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}\sin\sqrt{a_2}\tau\ \text{при}\ a_2>0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a_2}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}sh\sqrt{-a_2}\tau\ \text{при}\ a_2<0.\end{cases} \quad (40)$$

$$\Phi(x,s)\bullet\!\!-\!\!\circ\; C_a(x,\tau)=$$

$$=\left\{kC_0\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}F(t)dt-kB\delta\gamma\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^\tau e^{-\gamma\xi}\left[\int_0^{\tau-\xi}F(t)F_1(\tau-t)dt\right]d\xi\right\}e^{\frac{Wx}{2a^2}}+\frac{kB\delta\gamma e^{-\gamma\tau}}{\left(\gamma^2-a_1\gamma+a_0\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}\frac{e^{\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\tau}\left[\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\sin\sqrt{a_2}\tau-\sqrt{a_2}\cos\sqrt{a_2}\tau\right]+\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}} \\ \text{при}\, a_2>0, \\ \frac{e^{\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)\tau}\left[\left(\gamma-\frac{a_1}{2}\right)sh\sqrt{-a_2}\tau-\sqrt{-a_2}ch\sqrt{-a_2}\tau\right]+\sqrt{-a_2}}{\sqrt{-a_2}}- \\ -B\left(1-e^{-\gamma\tau}\right) \\ \text{при}\, a_2<0.\end{cases} \quad (41)$$

В решениях (40), (41) функция $F(t)$, также как и функция $F(\tau)$ определяется по соотношению (28) с заменой τ на t.

Функция $F_1(\tau-t)$ записывается согласно (29) в виде

$$F_1(\tau-t)=e^{-\frac{a_1(\tau-t)}{2}}\times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}} sin\left[\sqrt{a_2}\,(\tau - t) + \tau_1\right], \tau_1 = arctg \dfrac{\sqrt{a_2}}{-\dfrac{a_1}{2}} \\ при\, a_2 > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{a_2}{a_0}}} sh\left[\sqrt{-a_2}\,(\tau - t) + \tau_1\right], \tau_1 = Arth \dfrac{\sqrt{-a_2}}{-\dfrac{a_1}{2}} \\ при\, a_2 < 0. \end{cases} \qquad (42)$$

Литература

1. С.В. Анаников, *Вестн. Казан. технол. ун-та*, **15**, 8, 247-250 (2012).
2. О.Р. Каратаев, С.В. Анаников. *Вест. Казан. технол. ун-та*, **16**, 14, 59-65 (2013).
3. Г. Деч, *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа*. ГИФМЛ, Москва, 1958. 208 с.
4. А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, *Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах*. Высшая школа, Москва, 2001. 445 с.
5. В.А. Диткин, П.И. Кузнецов, *Справочник по операционному исчислению*. ГИТТЛ, Москва - Ленинград, 1951. 256 с.
6. Т.Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. Наука, Москва, 1964. 228 с.
7. М.Л. Левинштейн, *Операционное исчисление в задачах электротехники*. Энергия, Ленинград, 1972. 360 с.
8. И.С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. ГИФНЛ, Москва, 1963. 1100 с.

© О. Р. Каратаев - к.т.н., доцент каф. машиноведения КНИТУ, oskar_karataev@mail.ru; **С. В. Анаников** – д.т.н., проф. каф. химической кибернетики КНИТУ; ananikovsv@rambler.ru.