

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УСИЛИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Ключевые слова: стержневая система, усиление конструкции, вариационный метод, вынужденные колебания, аппроксимирующая функция.

Предлагается вариационный метод решения задач о вынужденных колебаниях стержневых систем, которые предварительно подвергались действию статических нагрузок до усиления и после усиления. На каждом последующем этапе решения задачи учитывалась деформация системы, вызванная действием нагрузок на предыдущих этапах. Приведены численные результаты.

Keywords: rods system, structural reinforcement, variational methods, forced oscillations, approximating functions.

Variational method is proposed for solving problems of forced oscillations of rod systems that are pre-exposed to static loads before amplification, and after amplification. At each stage of solving the problem of deformation of the system was taken into account, caused loading in the previous stages. Numerical results are given.

При усилении конструкций, частично утративших несущую способность в результате возникших повреждений или ослаблений, возникает необходимость проведения ремонтных работ без полной разгрузки этих конструкций. Полная разгрузка этих конструкций бывает не всегда целесообразной, а в некоторых случаях и не возможной. Аналогичные задачи возникают при реконструкции предприятий, в которых требуется усилить конструкции, находящиеся под действием внешних нагрузок. Вопросам определения несущей способности, расчетов на прочность и устойчивость такого рода конструкций посвящено достаточно много работ, в частности монографии [1-3].

В данной работе предлагается метод расчета усиленных под нагрузкой стержневых конструкций, подвергающихся после реконструкции динамическим нагрузкам. Для данных конструкций определяется напряженно-деформированное состояние в случае вынужденных колебаний.

Решение задачи разбивается на три этапа:

- 1) Определение напряженно-деформированного состояния первоначальной (ослабленной) стержневой системы от действия статических ремонтных нагрузок.
- 2) Определение напряженно-деформированного состояния усиленной стержневой системы от действия дополнительных статических нагрузок с учетом ремонтных напряжений.
- 3) Определение напряженно-деформированного состояния усиленной стержневой системы от действия динамических нагрузок с учетом ремонтных и дополнительных статических напряжений.

В качестве расчетной модели рассматриваются стержни с пространственными кусочно-гладкими осями. Предполагается, что материал стержня изотропный, действует закон Гука, перемещения малы. Принимаются следующие гипотезы: поперечные сечения стержня плоские до деформации остаются плоскими и после деформации; напряжениями, действующими в плоскости поперечных сечений стержня, пренебрегаем.

Для решения задачи на первых двух этапах используется вариационный принцип Лагранжа [4]. На первом этапе вариационное уравнение записывается так:

$$\delta \Pi^P - \delta' W^P = 0, \quad (1)$$

где Π^P - потенциальная энергия деформации первоначальной стержневой системы при действии ремонтных нагрузок; $\delta' W^P$ - вариация работы ремонтных нагрузок.

С учетом принятых гипотез

$$\begin{aligned} \delta \Pi^P &= \int_{L, A_p} (\sigma_{11}^P \delta \epsilon_{11}^P + \sigma_{12}^P \delta \epsilon_{12}^P + \sigma_{13}^P \delta \epsilon_{13}^P) dA dl, \\ \delta' W^P &= \int_L (q_1^P \delta u_1^P + q_2^P \delta u_2^P + q_3^P \delta u_3^P) dl + \\ &+ \sum_i (F_{i1}^P \delta u_1^{Pi} + F_{i2}^P \delta u_2^{Pi} + F_{i3}^P \delta u_3^{Pi}) + \\ &+ \sum_i (M_{i1}^P \delta \varphi_1^{Pi} + M_{i2}^P \delta \varphi_2^{Pi} + M_{i3}^P \delta \varphi_3^{Pi}). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{11}^P, \sigma_{12}^P, \sigma_{13}^P, \epsilon_{11}^P, \epsilon_{12}^P, \epsilon_{13}^P$ - ремонтные напряжения и деформации в произвольной точке стержня с координатами s, y, z ; u_1^P, u_2^P, u_3^P , $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \varphi_3^P$ - перемещения и углы поворота оси стержня, вызванные ремонтными нагрузками; q_1^P, q_2^P, q_3^P - компоненты интенсивности распределенной нагрузки; $F_{i1}^P, F_{i2}^P, F_{i3}^P$ - компоненты сосредоточенной силы, $M_{i1}^P, M_{i2}^P, M_{i3}^P$ - компоненты сосредоточенного момента, действующих в точке с координатой s_i ; s - длина дуги оси стержня; y, z - главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня; L, A_p - длина и площадь поперечного сечения стержня.

На втором этапе после усиления конструкции вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta \Pi^C - \delta' W^C = 0, \quad (2)$$

где

$$\delta \Pi^C = \int_{L, A} [(\sigma_{11}^P + \sigma_{11}^C) \delta \epsilon_{11}^C + (\sigma_{12}^P + \sigma_{12}^C) \delta \epsilon_{12}^C +$$

$$\begin{aligned}
& + (\sigma_{13}^p + \sigma_{13}^c) \delta \varepsilon_{13}^c \rfloor dAdl, \\
\delta' W^c = & \int_L \left[(q_1^p + q_1^c) \delta u_1^c + (q_2^p + q_2^c) \delta u_2^c + \right. \\
& + (q_3^p + q_3^c) \delta u_3^c \rfloor dl + \sum_i \left[(F_{i1}^p + F_{i1}^c) \delta u_1^{ci} + \right. \\
& + (F_{i2}^p + F_{i2}^c) \delta u_2^{ci} + (F_{i3}^p + F_{i3}^c) \delta u_3^{ci} \rfloor + \\
& + \sum_i \left[(M_{i1}^p + M_{i1}^c) \delta \varphi_1^{ci} + (M_{i2}^p + M_{i2}^c) \delta \varphi_2^{ci} + \right. \\
& + (M_{i3}^p + M_{i3}^c) \delta \varphi_3^{ci} \rfloor.
\end{aligned}$$

Здесь индексом «с» отмечены величины, относящиеся ко второму этапу, когда в результате усиления площадь поперечного сечения стержня стала равна A и на нее действуют дополнительные статические нагрузки. При этом оси y, z могут не быть главными центральными осями инерции измененного поперечного сечения стержня. Также при расчетах учитывается, что в результате действия нагрузок на первом этапе ось стержня подверглась деформации и изменились её геометрические характеристики.

Для решения задачи на третьем этапе используется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [4], на основании которого истинное движение системы за отрезок времени $[t_0, t_1]$ удовлетворяет вариационному уравнению:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \Pi^d + \delta K^d - \delta' W^d) dt = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
\delta \Pi^d = & \int_L \int_A \left[(\sigma_{11}^p + \sigma_{11}^c + \sigma_{11}^d) \delta \varepsilon_{11}^d + (\sigma_{12}^p + \sigma_{12}^c + \right. \\
& + \sigma_{12}^d) \delta \varepsilon_{12}^d + (\sigma_{13}^p + \sigma_{13}^c + \sigma_{13}^d) \delta \varepsilon_{13}^d \rfloor dAdl, \\
\delta K^d = & \int_L \int_A \left(\dot{u}_1^{*d} \delta \dot{u}_1^{*d} + \dot{u}_2^{*d} \delta \dot{u}_2^{*d} + \dot{u}_3^{*d} \delta \dot{u}_3^{*d} \right) dAdl + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k (\dot{u}_{1k}^d \delta \dot{u}_{1k}^d + \dot{u}_{2k}^d \delta \dot{u}_{2k}^d + \dot{u}_{3k}^d \delta \dot{u}_{3k}^d), \\
\delta' W^d = & \int_L \left[(q_1^p + q_1^c + q_1^d) \delta u_1^d + (q_2^p + q_2^c + q_2^d) \delta u_2^d + \right. \\
& + (q_3^p + q_3^c + q_3^d) \delta u_3^d \rfloor dl + \sum_i \left[(F_{i1}^p + F_{i1}^c + F_{i1}^d) \delta u_1^{di} + \right. \\
& + (F_{i2}^p + F_{i2}^c + F_{i2}^d) \delta u_2^{di} + (F_{i3}^p + F_{i3}^c + F_{i3}^d) \delta u_3^{di} \rfloor + \\
& + \sum_i \left[(M_{i1}^p + M_{i1}^c + M_{i1}^d) \delta \varphi_1^{di} + (M_{i2}^p + M_{i2}^c + \right. \\
& + M_{i2}^d) \delta \varphi_2^{di} + (M_{i3}^p + M_{i3}^c + M_{i3}^d) \delta \varphi_3^{di} \rfloor,
\end{aligned}$$

K^d - кинетическая энергия стержневой системы; $u_1^{*d}, u_2^{*d}, u_3^{*d}$ - перемещения точки стержня с координатами s, y, z ; $\dot{u}_i$ - частная производная от перемещения u_i по времени t ; ρ - плотность материала стержня; индексом «d» отмечены величины, относящиеся к третьему этапу, когда на стержень действуют динамические нагрузки.

На основании принятых гипотез можно получить следующие формулы, определяющие

перемещения и углы поворота точек поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned}
u_1^*(s, y, z, t) &= u_1(s, t) + z \varphi_2(s, t) - y \varphi_3(s, t), \\
u_2^*(s, y, z, t) &= u_2(s, t) - z \varphi_1(s, t), \\
u_3^*(s, y, z, t) &= u_3(s, t) + y \varphi_1(s, t), \\
\varphi_1^*(s, y, z, t) &= \varphi_1(s, t), \\
\varphi_2^*(s, y, z, t) &= \varphi_2(s, t), \\
\varphi_3^*(s, y, z, t) &= \varphi_3(s, t),
\end{aligned} \quad (4)$$

где $U^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*\}^T$ - вектор компонентов перемещения u_1^*, u_2^*, u_3^* и углов поворота $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*$ произвольной точки стержня; $U = \{u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$ - вектор компонентов перемещения и углов поворота оси стержня.

Деформации стержня определяются через деформации оси стержня по формулам

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon + z \cdot \kappa_2 - y \cdot \kappa_3, \\
\varepsilon_{12} &= \gamma_3 - z \kappa_1, \quad \varepsilon_{13} = \gamma_2 + y \kappa_1.
\end{aligned} \quad (5)$$

Деформации оси стержня находятся из соотношений Клебша:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= u_{1,s} - k_3 u_2 + k_2 u_3, \\
\gamma_2 &= -u_{3,s} + k_2 u_1 - k_1 u_2 - \varphi_2, \\
\gamma_3 &= u_{2,s} - k_1 u_3 + k_3 u_1 - \varphi_3, \\
\kappa_1 &= \varphi_{1,s} - k_3 \varphi_2 + k_2 \varphi_3, \\
\kappa_2 &= \varphi_{2,s} - k_1 \varphi_3 + k_3 \varphi_1, \\
\kappa_3 &= \varphi_{3,s} - k_2 \varphi_1 + k_1 \varphi_2,
\end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon, \gamma_2, \gamma_3$ - продольная деформация и углы сдвига; $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ - изменения кручения и кривизн (деформации кручения и изгиба) оси стержня; k_1, k_2, k_3 - кручение и кривизны оси стержня,

На основании обобщенного закона Гука и введенных гипотез получаются следующие физические соотношения, связывающие напряжения и деформации:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= E \varepsilon_{11}, \\
\sigma_{12} &= G \varepsilon_{12}, \\
\sigma_{13} &= G \varepsilon_{13},
\end{aligned} \quad (7)$$

где E, G - модули упругости и сдвига стержня.

При решении задачи искомые величины, найденные на предыдущих этапах, являются известными и подставляются в соответствующие уравнения для определения искомых величин на последующих этапах.

Для решения задачи стержневая система разбивается на элементы λ_i (рис.1), оси которых являются гладкими кривыми.

Введем для всей конструкции глобальную систему координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ и для каждого стержня λ_i локальные системы координат s_i, y_i, z_i , где координатная линия s_i направлена вдоль оси стержня, линии y_i, z_i совпадают с главными

центрными осями инерции поперечного сечения первоначального не усиленного стержня.

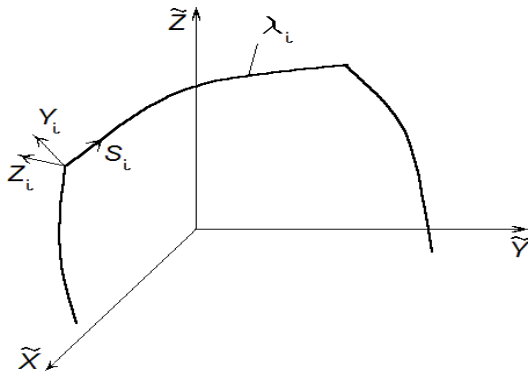


Рис. 1

Для каждого стержня λ_i за искомые неизвестные принимается вектор перемещений $\tilde{U}_i = \{\tilde{u}_1^i, \tilde{u}_2^i, \tilde{u}_3^i, \tilde{\varphi}_1^i, \tilde{\varphi}_2^i, \tilde{\varphi}_3^i\}^T$, заданный в глобальной системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. На каждом этапе этот вектор обозначается соответствующим индексом.

Решение ищется в виде [5,6]:

$$\tilde{U}_i(s, t) = \sum_{m=1}^M B_m^i(t) f_m(\beta_i), \quad (8)$$

где $B_m^i(t) = \{B_{m1}^i, B_{m2}^i, B_{m3}^i, B_{m4}^i, B_{m5}^i, B_{m6}^i\}^T$ - вектор неизвестных постоянных на первых двух этапах и вектор неизвестных функций от времени t на третьем этапе; $\beta_i = \frac{s_i - s_{i1}}{s_{i2} - s_{i1}}$, $0 \leq \beta_i \leq 1$; s_{i1}, s_{i2} - координаты начала и конца оси стержня λ_i .

Функции формы $f_m(\beta_i)$ записываются так:

$$\begin{aligned} f_1(\beta_1) &= 1 - \beta_1, \quad f_2(\beta_1) = \beta_1, \\ f_m(\beta_1) &= f_1(\beta_1) \cdot [f_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}). \end{aligned} \quad (9)$$

Изменяя количество слагаемых в выражении (8), можно получать аппроксимирующие функции различного порядка.

Если определить значения искомой функции в узловых точках, то в соответствии с функциями формы (9) имеем $\tilde{U}_i(s_{i1}, t) = B_1^i(t)$, $\tilde{U}_i(s_{i2}, t) = B_2^i(t)$. Следовательно, коэффициенты $B_1^i(t), B_2^i(t)$ определяют значения вектора перемещений соответственно в начальной и конечной точках оси стержня λ_i . Это обстоятельство позволяет легко осуществлять стыковку стержней и удовлетворять геометрическим граничным условиям. Так, если положить $B_1^i = B_2^j$, то будет выполнено условие стыковки начала i -го стержня с концом j -го стержня. Чтобы удовлетворить, например, граничному условию жесткого защемления на конце i -го стержня, т.е. условию $\tilde{U}_i(s_{i1}, t) = 0$, следует положить $B_1^i(t) = 0$.

Компоненты перемещения стержня λ_i в локальной системе координат связаны с компонентами перемещения в глобальной системе координат соотношениями:

$$U_i = [C_i] \tilde{U}_i, \quad (10)$$

где

$$[C_i] = \begin{bmatrix} [C_{io}] & 0 \\ 0 & [C_{io}] \end{bmatrix}, \quad [C_{io}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{io} & C_{12}^{io} & C_{13}^{io} \\ C_{21}^{io} & C_{22}^{io} & C_{23}^{io} \\ C_{31}^{io} & C_{32}^{io} & C_{33}^{io} \end{bmatrix},$$

$[C_{io}]$ - матрица направляющих косинусов локальной системы координат в глобальной системе координат.

Подставляя для каждого стержня λ_i аппроксимирующие функции (8) в равенства (10), определяя затем перемещения, деформации и напряжения стержней через перемещения осей стержней по формулам (4) - (7), подставляя полученные выражения для каждого этапа в вариационные уравнения (1) - (3), после соответствующих преобразований получают системы уравнений относительно неизвестных параметров $B_m^i(t)$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, I}$:

$$[D^p] \{B^p\} = \{F^p\}, \quad (11)$$

$$[D^c] \{B^c\} = \{F^c\}, \quad (12)$$

$$[D^d] \{B^d\} - [M^d] \{\ddot{B}^d\} = \{F^d\}, \quad (13)$$

где $[D^p], [D^c], [D^d]$ - матрицы жесткости стержневой системы для соответствующего этапа; $[M^d]$ - матрица масс на третьем этапе; $\{B^p\}, \{B^c\}$ - вектора неизвестных постоянных на первых двух этапах; $\{B^d\}$ - вектор неизвестных функций на третьем этапе; $\{F^p\}, \{F^c\}, \{F^d\}$ - вектора правых частей уравнений.

Вектора правых частей в этих уравнениях зависят от действующих на стержневую систему внешних нагрузок, а также от перемещений, полученных на предыдущих этапах.

Матричные уравнения (11) и (12) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений, уравнение (13) - систему линейных дифференциальных уравнений в обычных производных относительно неизвестных параметров B_m^i . Для решения задачи (13) используется метод Ньюмарка [7].

В качестве примера приведены результаты расчета усиленной рамной конструкции, показанной на рис.2,а. До усиления поперечные сечения всех стержней рамы одинаковые (двутавр № 18) и действует первоначальная (ремонтная) нагрузка $F^p = 10 \text{ кН}$. Усиление производится путем увеличения поперечного сечения левой стойки в два раза с помощью такого же стержня двутаврового сечения (рис.2,б). После этого на раму действует сначала статическая нагрузка $F^c = 15 \text{ кН}$, а затем постоянная динамическая нагрузка $F^d = 5 \text{ кН}$.

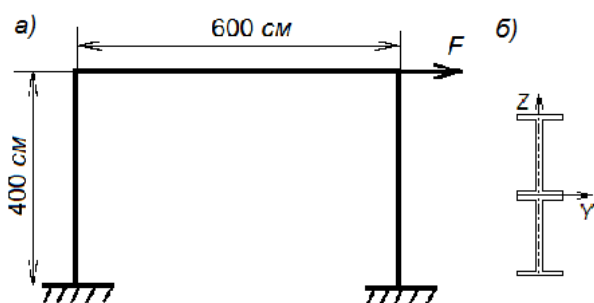


Рис. 2

На рис.3 приводятся графики изменения по времени максимального напряжения для усиленной рамы (линии 1) и для усиленной рамы (линии 2), у которой не учитываются ремонтные напряжения, предполагается, что вся нагрузка действует после усиления: $F^P = 0$, $F^C = 25 \text{ кН}$.

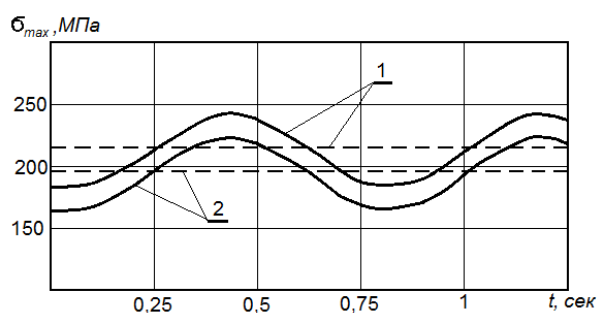


Рис. 3

Пунктирными линиями показаны максимальные напряжения в раме в случае, когда вся дополнительная нагрузка является статической

$F^C = 20 \text{ кН}$, $F^D = 0$. Статическое решение совпадает с решением, приведенным в работе [8].

Результаты показывают, что учет напряжений, действующих в конструкции до усиления, приводит к увеличению напряжений, появляющихся в конструкции после усиления.

Литература

1. Бондаренко С.В. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий / С.В. Бондаренко, Р.С. Санжаровский. – М.: Стройиздат, 1990. – 352 с.
2. Будин А.Я. Усиление портовых сооружений / А.Я. Будин, М.В. Чекренина. – Л.: Транспорт, 1983. – 178 с.
3. Ребров И.С. Усиление стержневых металлических конструкций / И.С. Ребров. – Л.: Стройиздат, 1988. – 288 с.
4. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П.Абовский, Н.П.Андреев, А.П.Деруга – М.: Наука, 1978. – 288 с.
5. Серазутдинов М. Н. Метод расчета криволинейных стержней / М.Н.Серазутдинов, Ф.С.Хайруллин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. - №5. – С. 104 – 108.
6. Хайруллин Ф.С. Моделирование динамики стержневых систем с движущимися массами. / Ф.С. Хайруллин, Х.А. Абрагим, О.И. Алхалили // Вестник Казанского технологического университета. № 8. Казань. 2013 г. С.133-136.
7. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Бате К., Вилсон Е. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. Серазутдинов М.Н. Особенности расчета усиливаемых упругопластических рамных систем с учетом продольных сил/ Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М.Н. // Вестник Казанского технологического университета. № 9. Казань. 2010 г.- С.523-529.