

УДК 539.3

Е. В. Артюх, Р. А. Каюмов, И. З. Мухамедова

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ НАЛОЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Ключевые слова: тензор напряжений, деформация, нелинейно-упругий материал, полость, контур.

Рассматривается решение плоской задачи об образовании круговой полости в предварительно нагруженном бесконечно протяженном теле из нелинейно-упругого материала средствами компьютерной алгебры на основе пакета «Mathematica». Учитывается, что образование полости приводит к перераспределению в теле конечных деформаций. Форма полости считается заданной в момент ее образования. Свойства материала описываются апробированными соотношениями, предложенными различными исследователями. Постановка задачи осуществляется на основе теории многократного наложения больших деформаций. Приводится приближенное аналитическое решение задачи и его сравнение с известным точным решением для частного случая.

Keywords: stress tensor, deformation, nonlinear elastic material, cavity, circuit.

The decision of using computer algebra package based on «Mathematica» plane problem of education circular cavity in a preloaded infinitely extended body of the non-linear elastic material. Taken into account that the formation of the cavity leads to a redistribution in the solid of finite deformations. The shape of the cavity defined at the moment of its formation. The material properties are described untested relations proposed by various researchers. Statement of the problem is based on the theory of multiple overlay large deformations. An approximate analytical solution and its comparison with known exact solution for a particular case.

Введение

Механическая постановка задачи следующая. Пусть в нелинейно-упругом бесконечно протяженном теле, находящемся в начальном (ненапряженном) состоянии, под воздействием внешних нагрузок возникли большие плоские статические деформации. Тело перешло в первое (промежуточное) состояние (рис. 1). Далее в этом теле намечается замкнутый круговой контур (будущая граница полости). Затем область, ограниченная данным контуром, удаляется. Под удалением, например, можно понимать «откол» одной части от другой или изменение свойств «удаляемой» части тела таким образом, что она не взаимодействует с оставшейся частью тела. Действие удаленной части тела на оставшуюся заменяется по принципу освобождаемости от связей силами, распределенными по данному контуру. Это не приводит к изменению напряженно-деформированного состояния в оставшейся части тела. Далее предполагается, что эти силы, перешедшие в разряд внешних, квазистатически значительно изменяются, что вызывает появление в оставшейся части тела дополнительных больших (по крайней мере, в окрестности вновь образованной граничной поверхности) деформаций, которые накладываются на уже имеющиеся большие начальные. Естественно меняется и форма граничного контура полости. Тело переходит в конечное состояние.

Математическая постановка данной краевой задачи записывается в координатах первого (промежуточного) состояния, т.к. в этом состоянии известна форма отверстия.

Уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \left[(1 + \Delta_{0,1})^{-1} \Sigma_{0,2} \cdot \Psi_{1,2} \right] = 0 \quad (1)$$

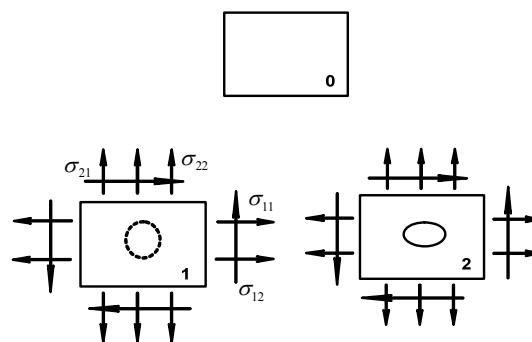


Рис. 1 - Постановка задачи (схема нагружения). 0 – начальное состояние (в теле отсутствуют напряжения и деформации); 1 – промежуточное состояние; 2 – конечное состояние, σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} – начальные напряжения на бесконечности

Граничные условия

$$\left. \Sigma_{0,2} \right|_{\Gamma_2} = -P(1 + \Delta_{0,2}) \Sigma_{1,2}^T \cdot \Psi_{1,2}^{-1} \quad (2)$$

$$\sigma_{0,2}|_{\infty} = \sigma_{0,2}^{\infty} \quad (3)$$

Условие несжимаемости (для несжимаемых материалов)

$$\Delta_{0,2} = 0 \quad (4)$$

Геометрические соотношения:

$$1 + \Delta_{0,2} = \det \Psi_{0,2} \quad (5)$$

$$\Psi_{0,2} = \Psi_{0,1} \cdot \Psi_{1,2}, \quad (6)$$

$$\Psi_{1,2} = I + \nabla^1 u_2. \quad (7)$$

Поставленная задача (1)-(7) решена для различных нелинейно-упругих материалов, определяющие соотношения для которых описаны известными исследователями.

Например, материал Мурнагана определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \Sigma_{0,n} = & \lambda \left(E_{0,n} \cdot I \right) I + 2G E_{0,n}^0 + 3C_3 \left(E_{0,n} \cdot I \right)^2 I + \\ & + C_4 \left(E_{0,n}^2 \cdot I \right) I + 2C_4 \left(E_{0,n} \cdot I \right) E_{0,n}^0 + 3C_5 \left(E_{0,n} \right)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

Определяющее соотношение для материала Муни имеет вид:

$$\sigma_{0,n} = \frac{\mu}{2} \left\{ (1 + \beta) F_{0,n} + (1 - \beta) \left[(F_{0,n} \cdot I) F_{0,n} - F_{0,n}^2 \right] \right\} - p_{0,n} I$$

Материал Трелоара определяется как:

$$\sigma_{0,n} = \mu F_{0,n} - p_{0,n} I \quad (9)$$

Материал Черныха имеет вид:

$$\sigma_{0,n} = \mu \left\{ (1 + \beta) F_{0,n}^{1/2} + (1 - \beta) F_{0,n}^{-1/2} \right\} - p_{0,n} I, \quad (10)$$

Материал Бартенева-Хазановича определяется как:

$$\sigma_{0,n} = 2\mu F_{0,n}^{1/2} - p_{0,n} I, \quad (11)$$

Определяющее соотношение для материала Валаниса-Ландела имеет вид:

$$\sigma_{0,n} = 2C \ln F_{0,n}^{1/2} - p_{0,n} I, \quad (12)$$

Материал Муни-Ривлина имеет вид:

$$\sigma_{0,n} = 2C_1 F_{0,n} - 2C_2 F_{0,n}^{-1} + C_3 F_{0,n}^{1/2} - p_{0,n} I. \quad (13)$$

Решение поставленной нелинейной задачи строилось на основе метода Синьорини. Для этого был разработан алгоритм и написана его программная реализация на внутреннем языке системы компьютерной алгебры «Mathematica», что позволило получить приближенное аналитическое решение задачи (расчеты выполнены для нулевого и первого приближений) [2]. Решение задачи – характеристики напряженно-деформированного состояния тела для различных типов материала – представлены элементарными функциями координат, параметров материала и нагрузки [3].

Далее приводятся некоторые полученные результаты для материала Мурнагана. Определяются выражения для главных значений тензора полных истинных напряжений как функции полярных координат при всестороннем растяжении с учетом давления на границе полости.

$$\sigma_1 = -\frac{p}{\rho^2} + \frac{q(\rho^2 - 1)}{\rho^2} - \frac{(p+q)^2(\rho^2 - 1)}{4G(2G + \lambda)\rho^4} \times (G + \lambda - 2C_4 - 3C_5), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & \frac{p}{\rho^2} + \frac{q(\rho^2 + 1)}{\rho^2} + \frac{(p+q)^2}{4G(2G + \lambda)\rho^4} \times \left[\rho^2(G + \lambda - 2C_4 - 3C_5) + \right. \\ & \left. + 13G + 5\lambda + 6C_4 + 9C_5 \right], \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь p – давление на контуре; q – нагрузка по осям x и y ; λ , G , C_3 , C_4 и C_5 – параметры материала Мурнагана.

Получены соотношения для компонент σ_{11}

и σ_{22} тензора полных истинных напряжений как функции в декартовых координатах при растяжении вдоль оси *без давления* на границе полости. Построены соотношения для компонент тензора полных деформаций для случая плоской деформации и одноосного растяжения по оси x нагрузкой q на бесконечности как функции декартовых координат.

При растяжении тела из материала Мурнагана вдоль оси x нагрузкой $q = 0.3G$ на бесконечности в точке контура полости с максимальной концентрацией напряжений посчитаны главные значения тензора полных деформаций. Они равны: $E_1 = 0.25$, $E_2 = -0.13$.

В точке контура полости тела из материала Мурнагана с максимальной концентрацией напряжений интенсивность деформаций для случая одноосного растяжения по оси x нагрузкой $q = 0.3G$ достигает 22%.

Аналогичные выражения и результаты получены и для других материалов.

На рис. 2 приведен контур полости до и после деформирования тела из материала Мурнагана при одноосном нагружении с давлением на границе полости и без него.

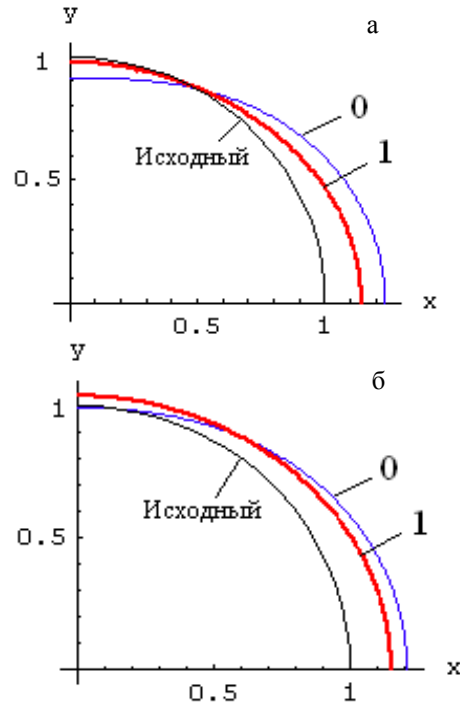


Рис. 2 - Материал Мурнагана. $\lambda = 2.1G$, $C_3 = -0.07G$, $C_4 = -0.38G$, $C_5 = 0.34G$. Растяжение вдоль оси x . Контур полости до и после деформирования. а) $q = 0.3G$, $p = 0$; б) $q = 0.2G$, $p = 0.1G$

Из приведенных выше графиков виден качественный результат учета нелинейных эффектов в точках контура [4].

На рис. 3 приводится сравнение полученных результатов с известным точным решением задачи для случая предварительного всестороннего

нагружения при плоской деформации материала Трелоара [5]. Представлены зависимости контурных напряжений от нагрузки на бесконечности. Отметим, что при $|q|/\mu < 0.6$ погрешность решения задачи методом Синьорини не превышает 9% для напряжений, при этом для перемещений получаются более точные результаты, чем для напряжений.

Рассматривая напряжения как функции начальных нагрузок, можно непосредственно до начала численных или численно-аналитических расчетов указать диапазон нагрузок, при которых такой подход невозможен.

Полученные результаты, в частности, позволяют в аналитической форме использовать нелокальные критерии прочности, давать предварительно оценку диапазона констант, при которых можно предполагать практическую сходимость численных методов в аналогичных задачах.

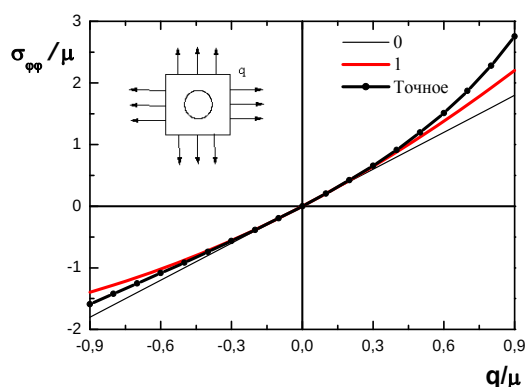


Рис. 3 - Материал Трелоара. Зависимость контурных напряжений от нагрузки на бесконечности

Авторы благодарят профессора В.А.Левина (Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова) за внимание к поставленной задаче и консультации при ее решении.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (соглашение 14.B37.21.2018).

1. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. – М.: Наука, 1999. – 224 с.
2. Левин В.А. Расчет напряженно деформированного состояния вблизи повреждения, возникающего в предварительно нагруженном теле из несжимаемого материала, с помощью программного комплекса для аналитических вычислений на ЭВМ «Наложение» / В.А.Левин, Е.В.Рыбалка // Пятнадцатый симпозиум «Проблемы шин и резинотканевых композитов». – Т.2. – ООО «НТЦ «НИИШП», Москва, 2004. – С. 40-45.
3. Левин В.А. О приближенном аналитическом решении задачи об образовании кругового концентратора напряжений / В.А.Левин, Е.В.Рыбалка // Известия Тульского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2004. – Т.10. – Вып.2. – Тула: ТулГУ. – С. 131-137.
4. Рыбалка Е.В. Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи кругового концентратора напряжений, образованного в нагруженном теле из нелинейно-упругого материала. Конечные деформации // Е.В.Рыбалка // Известия Тульского государственного университета. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». – 2005. – Вып.1. – Тула: ТулГУ. – С. 233-249.
5. Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 272с.
6. Каюмов Р.А. Моделирование поведения пленочно-тканевого материала при воздействии эксплуатационных факторов/ Р.А. Каюмов, А.М.Сулейманов, И.З.Мухамедова // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. – т.11. – №4. – С.519-530.
7. Каюмов, Р.А. Физически нелинейная модель тканевых материалов, обработанных в потоке высокочастотной плазмы/ Р.А.Каюмов, И.Ш.Абдуллин, М.Н.Серзутдинов, В.В.Хамматова, И.З.Мухамедова, Е.В.Кумпан, А.М.Шакирова // Вестник Казанского технологического университета. № 6. 2010. – С. 42 – 53.
8. Каюмов, Р.А. Математическое моделирование деформирования текстильных материалов с содержанием полимерных волокон /Р.А.Каюмов, В.В.Хамматова// Вестник Казанского технологического университета. № 14; 2012. – С. 154 – 156.

© Е. В. Артюх – к.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВПО «Тульский государственный университет» kate_eva@mail.ru, И. З. Мухамедова – к.ф.-м.н., доц. каф. сопротивления материалов и основ теории упругости КГАСУ, muhamedova-inzilija@mail.ru; Р. А. Каюмов – проф., д.ф.-м.н., зав. каф. сопротивления материалов и основ теории упругости КГАСУ, проф. каф. дизайна КНИТУ, kayumov@rambler.ru.