

А. В. Чупаев, Р. Р. Галямов, А. А. Гайнуллина,
В. В. Кузьмин

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЯ НА ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Ключевые слова: турбулентный поток, градиент давления.

В статье дано описание нестационарного турбулентного течения нагретого газа на базе интегральных соотношений неразрывности, импульсов и энергии.

Keywords: turbulent flow, the pressure gradient.

The article describes the unsteady turbulent flow of hot gas on the basis of integral relations of continuity, momentum and energy.

Для исследования характеристик нестационарных турбулентных потоков существует возможность применения различного экспериментального диагностического оборудования [1, 2]. Однако использование подобных средств диагностики не всегда оправдано, а иногда затруднительно. Альтернативой экспериментальным методам исследования является математическое моделирование, которое, применительно к рассматриваемой задаче может быть проведено, в частности, на основе интегральных соотношений неразрывности потока, импульсов и энергии в приближениях теории пограничного слоя. Эти соотношения получаются из уравнений (1), (2), (3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \rho \omega_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \omega_r) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \rho \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \rho \omega_r \frac{\partial \omega_x}{\partial r} = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{\Sigma} r), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p \omega_r \frac{\partial T}{\partial r} = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (q_z r) + \omega_x \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau_z = \mu \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \overline{\rho \omega'_x \omega'_r}$

$$q_z = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \overline{\rho C_p \omega'_r T'}$$

В результате умножения их на $\frac{\tau}{\tau_0} dr$ и

почленного интегрирования по радиусу канала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 \omega_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) \right] + \\ + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} \cdot \rho_0 \omega_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_0 \omega_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 \omega_0^2 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ - \delta^{++} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} \cdot \rho_0 \omega_0^2 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ - \delta^{++} \right) = \frac{r_0}{2} \frac{\partial P}{\partial x} - \tau_w, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[C_p \rho_0 \omega_0 \left\{ T_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) - (T_0 - T_w) \delta_T^{++} \right\} \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) \right] + \\ + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} \cdot C_p \rho_0 \omega_0 \left[T_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) - (T_0 - T_w) \delta_T^{++} \right] = \\ = -q_w + \omega_0 \left(\frac{r_0}{2} - \delta^+ \right) \frac{\partial P}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\delta^+ = \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{\rho \omega_x}{\rho_0 \omega_0} \right) \frac{r}{r_0} dr$$

$$\delta^{++} = \int_0^{r_0} \frac{\rho \omega_x}{\rho_0 \omega_0} \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega_0} \right) \frac{r}{r_0} dr$$

$$\delta_T^{++} = \int_0^{r_0} \frac{\rho \omega_x}{\rho_0 \omega_0} \left(1 - \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \right) \frac{r}{r_0} dr$$

$$\delta^+ = \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega_0} \right) \frac{r}{r_0} dr$$

$$\delta_\rho^+ = \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{r}{r_0} dr$$

Выражение для локальных коэффициентов трения и теплоотдачи в виде

$$\frac{C_f}{2} = (1 - \omega_1)^2 \left(\int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{\tau}{\rho l^2}} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{-2}, \quad (7)$$

$$St = \frac{2(\sqrt{\rho_1} - 1)}{\sqrt{\rho_1}} \cdot \frac{1}{1 - \psi_T}.$$

$$\cdot \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left(\int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{q^2}{\tau l^2}} \text{Pr}_t d\xi \right)^{-1}, \quad (8)$$

а также для профилей скорости и плотности по толщине турбулентного пограничного слоя

$$\omega = 1 - \sqrt{\frac{C_f}{2}} \cdot \int_{\xi}^1 \sqrt{\frac{\tau}{\rho l^2}} d\xi \quad (9)$$

$$\bar{P} = \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{C_f}} \cdot St(1 - \psi_T) \int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{\bar{q}^2}{\tau l^2}} Pr_t d\xi \right]^2 \quad (10)$$

Получены на основе использования гипотез Л.Прандтля и Ж.Фурье, в виде известных соотношений

$$-\overline{\omega'_x \omega'_r} = l^2 \left| \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial \omega_x}{\partial y}, \quad (11)$$

для турбулентных касательных напряжений, и для плотности тепловых потоков

$$-\overline{\omega'_x T'} = l \cdot \left| \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (12)$$

Для аппроксимации распределений касательных напряжений и тепловых потоков, входящих в (7), (8), (9) и (10) использованы полиномы

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + \tau'_{\omega} \xi (1 - 2\xi + \xi^2), \quad \tau'_{\omega} > 0 \\ \bar{\tau} &= 1 + \tau'_{\omega} \xi - (1 + \tau'_{\omega}) \xi^{1+\frac{\tau'_{\omega}}{\tau'_{\omega}}}, \quad \tau'_{\omega} < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{q} &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + q'_{\omega} \xi (1 - 2\xi + \xi^2), \quad q'_{\omega} \geq 0 \\ \bar{q} &= 1 + q'_{\omega} \xi - (1 + q'_{\omega}) \xi^{1+\frac{q'_{\omega}}{q'_{\omega}}}, \quad q'_{\omega} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

взяты из работ [2], [3].

Нахождение параметров τ'_{ω} и q'_{ω} не представляет сложности. Для этого уравнение (2) исходя из условия прилипания жидкости к стенке, представляется в виде

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{1}{r} \left[r \left(\frac{d\tau}{dr} \right)_{\omega} + \tau_{\omega} \frac{dP}{dr} \right] = 0 \quad (15)$$

а из него получается (16):

$$\tau'_{\omega} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi} \right)_{\omega} = \frac{\delta}{r_0} + \frac{\delta}{\tau_{\omega}} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (16)$$

Для потенциального ядра потока, выражение для продольного градиента давления имеет вид:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho_0 \omega_0 \frac{d\omega_0}{dx} - \rho_0 \frac{d\omega_0}{dt} \quad (17)$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \tau'_{\omega} &= Z + \lambda + \frac{\delta}{r_0} = -\frac{\delta}{r_{\omega}} \rho_0 \omega_0 \frac{d\omega_0}{dt} - \\ &- \frac{\delta}{\tau_{\omega}} \rho_0 \frac{d\omega_0}{dt} + \frac{\delta}{r_0} \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогичным способом и с учетом условий на стенке $T = T_{\omega} = const$, $\frac{dT}{dx} = \frac{dT_{\omega}}{dt} = 0$, $\omega_x = 0$, из уравнения (3) получается выражение для производной q'_{ω} :

$$q'_{\omega} = \frac{\delta}{r_0} \quad (19)$$

Выражения для параметров на внешней границе вязкого подслоя

$$\xi_1 = 11.6 \left(R^+ \cdot \frac{\delta}{\delta^+} \sqrt{\frac{Cf}{2} \left(1 + \frac{\tau'_{\omega}}{2} \xi \right)} \right)^{-1} \quad (20)$$

$$\text{и } \omega_1 = \frac{11.6^2}{R^+ \cdot \frac{\delta}{\delta^+} \xi_1}, \quad (21)$$

входящие в (7) и (8), получены интегрированием (2) в пределах вязкого подслоя с использованием линейного закона «стенки»:

$$v^+ = Y^+ \quad (22)$$

Для установления связи между плотностью рабочего тела и параметрами состояния P и T воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p = \rho RT, \quad (23)$$

считая, что рабочее тело представляет собой совершенный газ, а турбулентное число Прандтля Pr_t независимо от фактора гидродинамической нестационарности и равно 0,9.

Решение системы (4) - (6), для области гидродинамического начального участка проведено, конечноразностным методом. Расчетная сетка показана на рис.1.

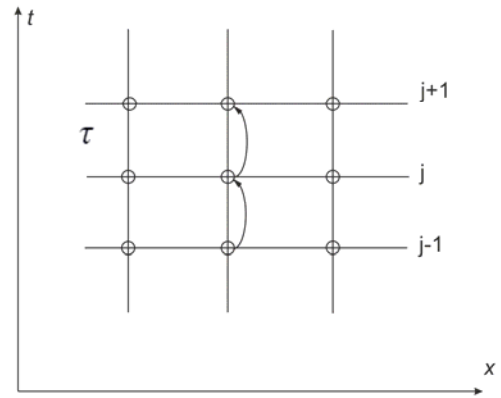


Рис. 1 - Расчетная сетка

Уравнения (4), (5), (6) заменялись, конечноразностными аналогами в явном виде с первым порядком аппроксимации.

Граничные и начальные условия на каждом шаге аппроксимации задавались в виде:

$$\begin{aligned} \rho_{01}^j &= f_1(t), \quad \omega_{01}^j = f_2(t), \\ \delta_1^{+j} &= f_3(t), \quad P_1^j = f_4(t). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \omega_{0i}^1 &= g_1(x), \quad \delta_i^{+1} = g_2(x) \\ \rho_{0i}^1 &= g_3(x), \quad P_i^1 = g_4(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Условия (24) задавались при постановке задачи, а начальные условия в первом приближении принимались в виде

$$\begin{aligned} \omega_{0i}^1 &= f_2(0), \quad \delta_i^{+1} = f_3(0) \\ \rho_{0i}^1 &= f_1(0), \quad P_i^1 = f_4(0). \end{aligned} \quad (26)$$

Расчет начинался с точки (1;1).

По известным значениям параметров ω_0 ,

ρ_0 , δ^+ , P и $\frac{d\omega_0}{dx}$, $\frac{d\omega_0}{dt}$ производился расчет по

формулам (7)-(21) итерационными методами до выполнения условий:

$$\left| \frac{C_f^{n+1}}{2} - \frac{C_f^n}{2} \right| \leq 10^{-8},$$

$$\left| St^{n+1} - St^n \right| \leq 10^{-8},$$

где n – номер итерации. В каждой расчетной точке определялись δ^{++} , δ_T^{++} , δ_ρ^+ , δ^+ , q_w , τ_w , δ .

Начальные условия задавались приближенно, поэтому применялся нестационарный метод расчета. Расчет производился до тех пор, пока не выполнится условие для каждой точки (i, j) :

$$\left| \rho_0^{m+1} - \rho_0^m \right| \leq 10^{-6}$$

$$\left| \delta^{m+1} - \delta^m \right| \leq 10^{-8}$$

$$\left| \omega_0^{m+1} - \omega_0^m \right| \leq 10^{-5} \quad (27)$$

Таблица 1 - Условия расчетов

Номер режима	1	2	3
Тип канала	цилиндр	диффузор	Конфузор
Угол раскрытия, tga	0	0,021875	- 0,021875
Длина предвключенного участка, м	0	0,225	0,225
Диаметр предвключенного цилиндра, м	0,05	0,05	0,075
Период, сек	0,55	0,5	0,5
$\overline{w_{01}}$, [м/с]	47,5	60	50
A_1	0,47368	0,66666	0,6
Сетка, $N_x \times N_y$	27x47	51x51	51x51

Ниже в качестве примера приведены результаты расчета некоторых гидродинамических параметров нестационарного турбулентного течения воздуха в цилиндрических, конфузорных и диффузорных каналах. Во всех расчетах распределение скоростей во входных сечениях каналов (при $x=0$) принималось равномерным, а изменение расхода рабочей среды – происходящим по гармоническому закону следующего вида (28):

$$\omega_{01} = \overline{\omega}_0 (1 - A \cos \omega t) \quad (28)$$

Наблюдаемая на графиках (рис. 2) картина свидетельствует о том, что при нестационарном, в частности, в пульсирующем течении рабочего тела в закрытом канале изменения различных параметров потоков в различных сечениях гидродинамических начальных участков происходят с существенными сдвигами по фазе. Причем характер этих сдвигов в значительной степени зависит от формы проточной части канала.

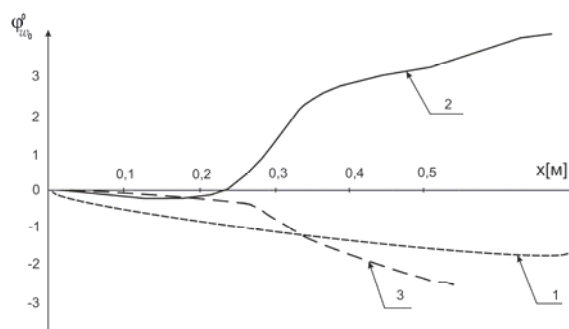


Рис. 2 - Изменение фазовых сдвигов скоростей потока в потенциальном ядре по длине цилиндрического (1), диффузорного (2) и конфузорного (3) каналов

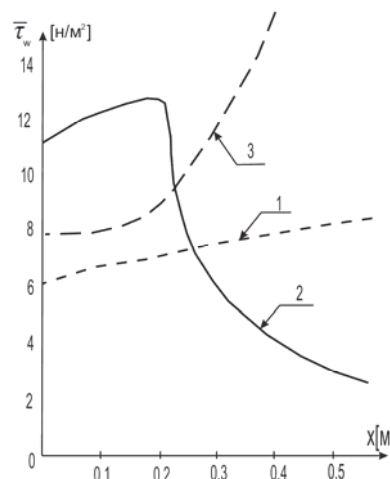


Рис. 3 - Изменение осредненных за период пульсации потока значений пристенных касательных напряжений по длине гидродинамического начального участка в цилиндрическом (1), диффузорном (2) и конфузорных (3) каналах

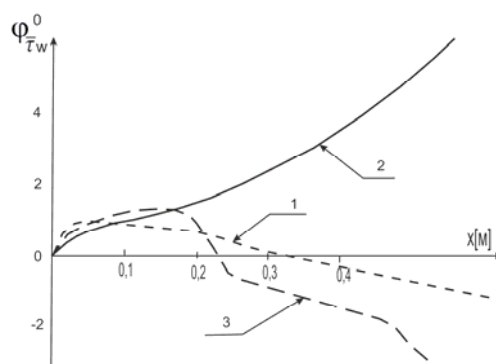


Рис. 4 - Фазовые сдвиги в колебаниях пристенных касательных напряжений по длине гидродинамического начального участка в цилиндрическом (1), диффузорном (2) и конфузорных (3) каналах

На рис. 5 представлены пространственно-временные развертки значений локальных коэффициентов трения (а), толщины вытеснения (б), и толщины потери импульса (в) в области гидродинамических начальных участков диффузорного канала.

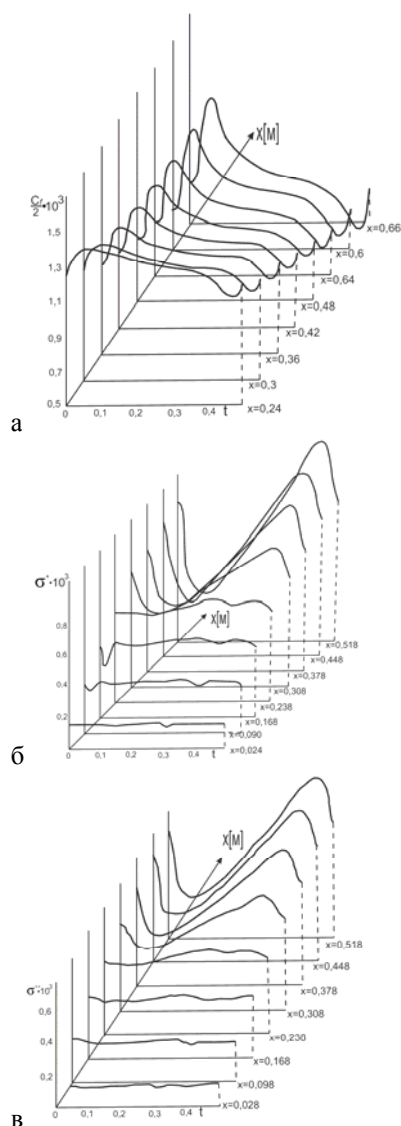


Рис. 5 - Пространственно-временные развертки значений локальных коэффициентов трения (а), толщины вытеснения (б), и толщины потери импульса (в) в области гидродинамических начальных участков диффузорного канала

Условные обозначения

x, r – оси цилиндрической системы координат, [м];

ω_δ, ω_r – проекции осредненных значений скоростей на соответствующие оси, [м/с];

T – температура, [°K];

ρ – плотность, [кг/м³];

τ – касательное напряжение, [н/м²];

q – плотность тепловых потоков, [Вт/м²];

R – универсальная газовая постоянная;

A – амплитуда;

W – циклическая частота, [1/сек];

Индексы:

1 – вход в канал или внешняя граница вязкого подслоя;

W – на стенке;

0 – на оси.

Литература

1. Юшко С.В. Газодинамический стенд для изучения стационарных и нестационарных турбулентных воздушных потоков в трубах / С.В. Юшко. Вестник КНИТУ. -2013. № 21. - с. 125-128.
2. Кузьмин В.В. и др. Установка для метрологического обслуживания, динамических испытаний и газодинамических исследований преобразователей расхода / В.В. Кузьмин, А.А. Гайнуллина, А.Н. Ахмерова. Вестник КНИТУ. -2013. № 10. - с. 289-292.
3. Кутателадзе С.С. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа / С.С. Кутателадзе, А.И. Леонтьев. Новосибирск: СО АН СССР, 1962, 180с.
4. Федяевский К.К. Нестационарный турбулентный пограничный слой крылового профиля и тела вращения / К.К. Федяевский, А.С. Гиниевский. ЖТФ. - 1959, т.29, вып.7, с. 916-923.
5. Фафурин А.В. Законы трения и теплоотдачи в турбулентном пограничном слое. В сб. тепло- и массообмен в двигателях летательных аппаратов / А.В. Фафурин. Межвузовский сборник. -1979. - Казань, вып.2, с. 62-69.

© А. В. Чупаев – канд. техн. наук, доц. каф. САУП КНИТУ, sautp@yandex.ru; Р. Р. Галямов – ст. препод. той же кафедры; А. А. Гайнуллина – асс. той же кафедры; В. В. Кузьмин – канд. техн. наук, доц. той же кафедры.