

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

РАСЧЁТ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе представлен алгоритм расчёта среднего времени ожидания в открытых системах массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди в стационарном режиме функционирования.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

This paper presents an algorithm of the calculation of the average waiting time in the open systems of mass service with a polycomponent input stream and a great number of restrictions on the length of the queue in the stationary mode of functioning.

В опубликованном к настоящему времени цикле работ авторов [1 - 16] было введено понятие открытых систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков, являющихся комбинациями известных систем массового обслуживания (СМО) различных типов, к которым относятся, в частности, многоканальная классическая СМО, СМО с отказами и СМО с очередью конечной длины. В этих работах авторами были впервые исследованы основные характеристики стационарного режима комбинированных систем массового обслуживания такого типа. Настоящая публикация продолжает начатый цикл исследований.

Напомним, что при этом рассматриваемая нами СМО имеет m обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких различных типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.

- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;

- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;

- h -й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в

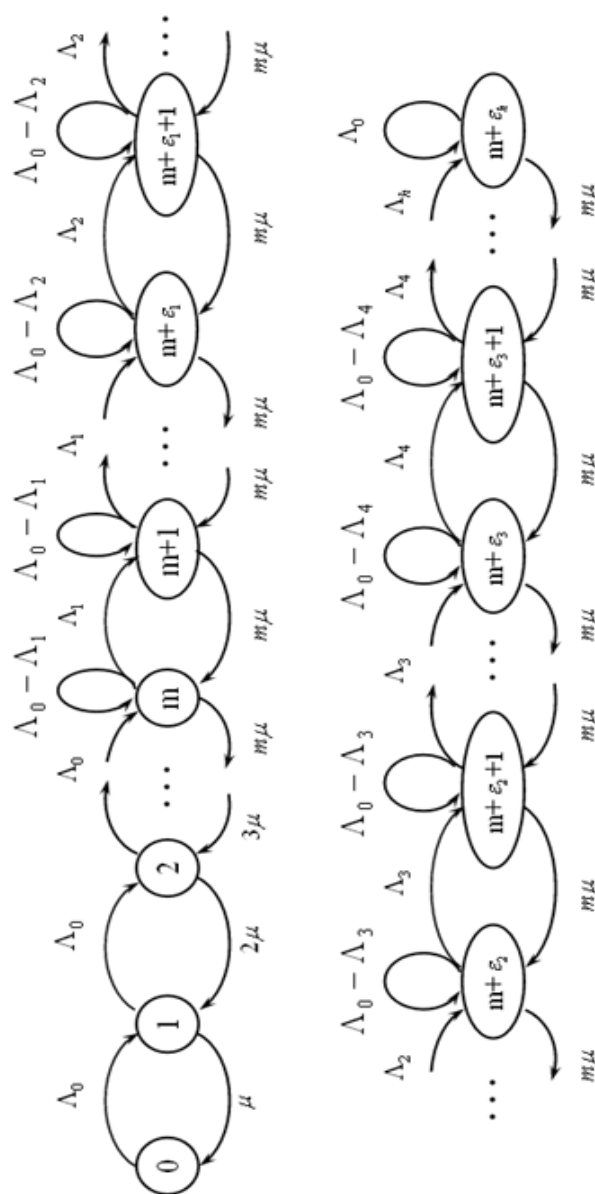


Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

очереди меньше определённого числа ε_h . В случае, когда в очереди уже имеется ε_h или более требова-

ний, вновь поступившая заявка h -го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

Потоки заявок такого рода будем называть поликомпонентными, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным правилам, - системами дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков [5, 6]. Граф состояний и переходов такой СМО приведён на рис.1.

Принятые обозначения:

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \quad \varepsilon_1 = E_1; \quad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \dots$$

$$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^j E_i = \sum_{i=1}^j E_i \quad - \text{ограничения длины очереди}$$

для заявок j -го типа;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^h \lambda_j; \quad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j; \quad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^h \lambda_j; \dots$$

$\Lambda_h = \lambda_h$; где λ_j - интенсивности потоков заявок j -го типа;

$$R_0 = \sum_{j=0}^h \rho_j; \quad R_1 = \sum_{j=1}^h \rho_j; \quad R_2 = \sum_{j=2}^h \rho_j; \dots$$

$$R_h = \rho_h; \quad R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu}, \text{ где } \rho_j - \text{приведенные интен-}$$

сивности потоков заявок j -го типа.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j , суммарные поликомпонентные потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [17]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим как μ . В этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m -го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Ясно, что поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учетом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. С учетом формул, полученных для вероятностей стационарных состояний, а также числовых характеристик, функции и плотности распределения времени ожидания, приведенных в работах [10-16], найдем общую зависимость среднего времени ожидания обслуживания вновь прибывшей заявкой от параметров входного потока заявок в стационарном режиме работы системы.

$$\bar{t}_{ож} = \int_0^{\infty} t f_{ож}(t) dt =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P_{m-1}}{q} \left\{ \Lambda_1 \int_0^{\infty} t e^{-m\mu t} e_{\varepsilon_1-1}(\Lambda_1 t) dt + \sum_{i=2}^h \Lambda_i \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \times \right. \\ &\times \left[\int_0^{\infty} t e^{-m\mu t} e_{\varepsilon_i-1}(\Lambda_i t) dt - \int_0^{\infty} t e^{-m\mu t} e_{\varepsilon_{i-1}-1}(\Lambda_i t) dt \right] \Big\} = \\ &= \frac{P_{m-1}}{q} \left\{ \Lambda_1 \frac{1}{(m\mu)^2} \sum_{j=0}^{\varepsilon_1-1} \frac{(1+j)!}{j!} \left(\frac{\Lambda_1}{m\mu} \right)^j + \right. \\ &+ \sum_{i=2}^h \Lambda_i \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[\frac{1}{(m\mu)^2} \sum_{j=0}^{\varepsilon_i-1} \frac{(1+j)!}{j!} \left(\frac{\Lambda_i}{m\mu} \right)^j - \right. \\ &- \left. \frac{1}{(m\mu)^2} \sum_{j=0}^{\varepsilon_{i-1}-1} \frac{(1+j)!}{j!} \left(\frac{\Lambda_i}{m\mu} \right)^j \right] \Big\} = \frac{P_{m-1}}{q} \times \\ &\times \left\{ \Lambda_1 \frac{1}{(m\mu)^2} \frac{1 - (\varepsilon_1 + 1) \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1+1}}{\left(1 - \frac{R_1}{m} \right)^2} + \right. \\ &+ \sum_{i=2}^h \Lambda_i \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(m\mu)^2} \frac{1 - (\varepsilon_i + 1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_i+1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{(m\mu)^2} \frac{1 - (\varepsilon_{i-1} + 1) \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_{i-1}} + \varepsilon_{i-1} \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_{i-1}+1}}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} \right] \Big\} = \\ &= \frac{P_{m-1}}{q} \frac{1}{(m\mu)^2} \left\{ \Lambda_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1}}{\left(1 - \frac{R_1}{m} \right)^2} - \frac{\varepsilon_1 \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1}}{1 - \frac{R_1}{m}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{i=2}^h \Lambda_i \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \times \\ &\times \left[\frac{1 - \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_i} - \varepsilon_i \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_i} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} - \right. \\ &- \left. \frac{1 - \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_{i-1}} - \varepsilon_{i-1} \left(\frac{R_i}{m} \right)^{\varepsilon_{i-1}} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m} \right)^2} \right] \Big\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_{m-1}}{q} \frac{1}{(m\mu)^2} \left\{ \Lambda_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}}{\left(1 - \frac{R_1}{m}\right)^2} - \frac{\varepsilon_1 \left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}}{1 - \frac{R_1}{m}} \right] + \right. \\
&+ \sum_{i=2}^h \Lambda_i \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i}\right)^{E_g} \left[\frac{\left(\frac{R_i}{m}\right)^{\varepsilon_{i-1}} \left(1 - \left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m}\right)^2} + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\left(\frac{R_i}{m}\right)^{\varepsilon_{i-1}} \left(\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i \left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right)}{1 - \frac{R_i}{m}} \right] \right\} = \\
&= \frac{P_{m-1}}{q} \frac{1}{(m\mu)^2} \left\{ \Lambda_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}}{\left(1 - \frac{R_1}{m}\right)^2} - \frac{\varepsilon_1 \left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}}{1 - \frac{R_1}{m}} \right] + \right. \\
&+ \sum_{i=2}^h \Lambda_i \left[\frac{\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g} \left(1 - \left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right)}{\left(1 - \frac{R_i}{m}\right)^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\varepsilon_{i-1} \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g} \left(1 - \left(\frac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right)}{1 - \frac{R_i}{m}} - \frac{E_i \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}}{1 - \frac{R_i}{m}} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{q} \frac{m}{R_0} \frac{1}{(m\mu)^2} \left\{ \frac{\Lambda_1}{1 - \frac{R_1}{m}} [P_{B1} - E_1 P_{m+E_1}] + \right. \\
&+ \sum_{i=2}^h \frac{\Lambda_i}{1 - \frac{R_i}{m}} \left[P_{Bi} \left(1 + \varepsilon_{i-1} \left(1 - \frac{R_i}{m} \right) \right) - E_i P_{m+\varepsilon_i} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{\Lambda_0 q} \left\{ \frac{R_1}{m - R_1} [P_{B1} - E_1 P_{m+E_1}] + \right. \\
&+ \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m - R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}] + \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m} \varepsilon_{i-1} P_{Bi} \left. \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Lambda_0 q} \left\{ \sum_{i=1}^h \frac{R_i}{m - R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}] + \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m} \varepsilon_{i-1} P_{Bi} \right\} = \\
&= \frac{1}{\Lambda_0 q} \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{R_i}{m - R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}] + \frac{R_i}{m} \varepsilon_{i-1} P_{Bi} \right\} = \frac{\bar{I}}{A}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение соответствует одной из формул Литтла, записанной здесь в обобщённом виде [18, 19].

Результаты расчётов, полученные в настоящей работе, продолжают указанный цикл работ авторов и могут быть использованы при проектировании и эксплуатации достаточно широкого класса объектов и систем, работающих по принципу систем и сетей массового обслуживания.

Литература

1. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 4, 78-85 (2006);
2. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 14, 5, 893-896 (2007);
3. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 15, 6, 1090-1091 (2008);
4. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 5, С. 154-161 (2011);
5. А.С. Титовцев, Дисс. канд. техн. наук, КНИТУ, Казань, 2011. 143 с.;
6. А.С. Титовцев, *Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 132 с.;
7. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 15, 1, С. 148-152 (2012);
8. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 15, 6, С. 201-202 (2012);
9. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 15, 8, С. 337-340 (2012);
10. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 6, С. 248-252 (2013);
11. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Наука в Центральной России*, 4, С. 5-8 (2013);
12. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 11, С. 255-257 (2013);
13. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 18, С. 282-286 (2013);
14. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 23, С. 242-244 (2013);
15. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 17, 4, С. 307-312 (2014);
16. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 17, 5, С. 279-281 (2014);
17. А.Я. Хинчин, *Работы по математической теории массового обслуживания*. М., ГИФМЛ, 1963. 236 с.;
18. А.П. Кирпичников, *Прикладная теория массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского гос. ун-та, 2008. 112 с.;
19. А.П. Кирпичников, *Методы прикладной теории массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского университета, 2011. 200 с.