УДК 009.942

Р. М. Фаттахаев, А. А. Назаров, С. И. Поникаров

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Ключевые слова: моделирование, гидродинамика.

В данной статье рассмотрены различные модели задач гидродинамики, описаны их особенности и на чем основаны эти модели.

Keywords: modeling, hydrodynamics.

This article describes the various models of problems of hydrodynamics are described and their features based on what these models.

Фундаментальные уравнения динамики жидкости и газа основаны на универсальных законах: сохранения массы, сохранения количества движения и сохранения энергии. Уравнение, получающееся в результате применения закона сохранения массы к потоку жидкости, называется уравнением неразрывности. Закон сохранения количества движения – это второй закон Ньютона. Его применение к потоку жидкости дает векторное уравнение, известное как уравнение количества движения или как уравнение импульса. Закон сохранения энергии тождественен первому закону термодинамики и в динамике жидкости и газа уравнение, являющееся его выражением, называется уравнением энергии. Для замыкания систем к уравнениям, полученным из упомянутых выше законов сохранения, следует добавить соотношения, устанавливающие связь между свойствами жидкости. Примером такого соотношения может быть уравнение состояния, связывающие термодинамические параметры жидкости: давление p, плотность ρ и температуру T. [1].Эту систему уравнений принято называть уравнениями Навье-Стокса.

Для примера запишем систему уравнений для неизотермического (с теплообменом) течения несжимаемой жидкости в декартовых прямоугольных координатах. Она будет состоять из уравнений неразрывности (1), движения (2), и энергии (3).

$$\nabla \mathbf{U} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = \mathbf{J} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)T = a\Delta T + \frac{q_v}{\rho c_p} \qquad (3)$$

В данных уравнениях J есть результирующий вектор массовых сил, ν – кинематическая вязкость среды (ν=μ/ρ), a – коэффициент температуропроводности (a=λ/ρcp). В тензорных обозначениях она будет выглядеть как:

В наиболее общем случае система уравнений Навье-Стокса включает всебя уравнения неразрывности, движения и энергии. Если впотоке происходят химические реакции, задача усложняется введениемуравнений модели протекания данных реакций. Решение

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} = J_k - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = a \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{q_v}{\rho c_p}$$

турбулентного течения жидкости обуславливается введением дополнительных уравнений.

Уравнения Навье-Стокса могут быть решены в общем виде лишь внекоторых случаях и при ряде допущений. Общего аналитического решениясистемы этих уравнений пока не получено. При этом численные методырешения уравнений Навье-Стокса развиты довольно хорошо и насегодняшний день нашли широкое применение в различных областях науки итехники. Численное моделирование является неотъемлемой частью процессапроектирования летательных аппаратов, двигательных установок, ракетнойтехники, автомобилей и т.д.

В настоящее время развиты три основных подхода к численномурешению уравнений Навье-Стокса. Первый из них носит название Методаконечных разностей. По-английски – FiniteDifferenceMethod (FDM). Егосуть заключается в прямой замене производных, входящих в исходныеуравнения, их дискретными (разностными) аналогами. Решение ищется вузлах сетки, на которую разбивается расчётная область. Достоинствометода является относительная простота реализации, при этом, однако, с точки зрения физического смысла этот метод не очень нагляден. Другимнедостатком этого метода являются особые требования к построению сетки, что часто усложняет процесс решения.

Второй называется Методом конечных объёмов или методомконтрольного объёма. В англоязычной литературе он называется FiniteVolumesMethod (FVM). Основа метода заключается в том, что расчётнаяобласть с помощью сетки разбивается на совокупность конечных объёмов. Узлы, в которых ищется решение, находятся в центрах этих объёмов. Длякаждого объёма должны выполняться законы сохранения массы, количества, движения и энергии. То есть, например, изменение во времени массы среды вконтрольном объёме может происходить только за счёт внешнего потокамассы, входящего в объём, или за счёт потока массы из данного объёма выходящего. Метод конечных объёмов применяется во многих вычислительных гидродинамических (CFD) пакетах, таких как FlowVision, ANSYS Flotran, Flow3d, PHOENICS и ряде других [2].

Третий метод решения – Метод Конечных Элементов (МКЭ). Ванглоязычной литературе его называют FiniteElementsMethod (FEM). Сутьметода состоит в приближенном решении вариационной задачи. Для формулировки этой задачи применяют понятие функционала. Оператор I[f(x)] называется функционалом, заданным на некотором множестве функций, еслικаждой функции f(x) ставится в соответствие определённое числовое значение I[f(x)]. Иными словами, функционал является как бы «функциейот функции». Часто функционалы имеют вид интегралов. Вариационнаязадача состоит в отыскании такой функции f(x), которой бы соответствоваломинимальное значение функционала I[f(x)]. Вид этого функционала различендля различных задач и подбирается специально [3].

В настоящее время Метод Конечных Элементов нашёл широкоеприменение при решении задач теплопроводности в твёрдых телах и прирасчётах на прочность. Однако он может быть применён и к задачам теченияжидкостей и газов. Известны также методы, которыесочетают в себе черты метода конечных объёмов и метода конечныхэлементов. Сочетание этих методов позволяет использовать болеешироκий ряд расчётных сеток (тетраэдрические сетки, пирамиды, призмы, полиэдры), что необходимо при решении задач со сложной геометрией. Этот подход используют CFD пакеты Ansys CFX, AnsysFluent, Star-CD, Star-CCM+ [4].

Итак, подводя итоги проведенного анализа можно сказать, что уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике. На данный момент не найдено общего аналитического решения системы и это является одной из семи главных «проблем тысячелетия». Решение уравнений усложняется их нелинейностью, турбулентностью,

сжимаемостью среды и зависимостью от начальных и граничных условий. Однако численное моделирование довольно успешно используется во многих природных явлениях и технических задачах.

Литература

1. Харламов С.Н. Алгоритмы при моделировании гидродинамических процессов. – Томск. Изд-во ТПУ, 2008. - 80с.
2. Аникеев, А. А. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики: учебное пособие /А. А. Аникеев, А. М. Молчанов, Д. С. Янышев. – М.: URSS:[ЛИБРОКОМ], 2010.—149с.
3. Н. А. Газизуллин Гидродинамика потоков, создаваемых лопастной мешалкой // Вестник казанского технологического университета, №2, 2012, С.59-61.
4. А. С. Конаков, А. А. Назаров, С. И. ПоникаровМоделирование гидродинамики и нагрева реакционной смеси в экспериментальной установке вакуумного дегидрирования // Вестник казанского технологического университета, 2014, №7, С. 224-225.

© **Р. М. Фаттахаев -** магистрант кафедры МАХП КНИТУ, cool.machete2011@yandex.ru; **А. А. Назаров** - к.т.н., доцент той же кафедры, mahp-kstu@mail.ru; **С. И. Поникаров** – д.т.н., проф., зав. каф. МАХП КНИТУ.

© **R. M. Fattahaev** - graduate stud. KNRTU, cool.machete2011@yandex.ru; **A. A. Nazarov -** associate professor, KNRTU, mahp-kstu@mail.ru; **S. I. Ponikarov** – Prof., KNRTU.