

В. Х. Федотов, Н. И. Кольцов

МОДЕЛИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. ЧАСТЬ 4. ОДНОМЕРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Ключевые слова: одномерные динамические системы, хаотические режимы, инварианты, показатели Ляпунова.

Исследована возможность описания хаотической динамики одномерными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Приводится методика получения этих ОДУ, а также одномерные нелинейные инварианты и результаты их численного исследования. Для доказательства существования хаоса проведен расчет показателей Ляпунова и использованы некоторые точные аналитические решения ОДУ.

Keywords: one-dimensional dynamical systems, chaotic regimes, invariants, Lyapunov exponents.

The possibility of describing the chaotic dynamics of one-dimensional ordinary differential equations (ODE) was investigated. The technique of obtaining these ODE, as well as one-dimensional nonlinear invariants and the results of numerical studies is given. To prove the existence of chaos Lyapunov exponents were calculated and used some of the exact analytical solutions of the ODE.

Введение

Описание хаотической динамики простыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) открыло эпоху недетерминированной эволюции детерминированных диссипативных систем [1-4]. Первую хаотическую динамическую систему обнаружил Э. Лоренц [1] при описании погоды автономными диссипативными моделями гидродинамического типа. Такие модели представляют собой системы ОДУ размерности n с квадратичной нелинейностью (квадриками) в правых частях

$$\dot{x}_i = \sum_{j,k} a_{ijk} x_j x_k + \sum_j b_{ij} \dot{x}_j + c_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

где a_{ij} , b_{ij} , c_i – параметры. Модель Лоренца является разновидностью систем (1) и в безразмерной записи включает три квадратики с тремя параметрами

$$\dot{x} = -ax + ay, \quad \dot{y} = bx - xz - y, \quad \dot{z} = xy - cz, \quad (2)$$

здесь x – скорость конвекции воздуха, y – разность температур между восходящими и нисходящими потоками, z – отклонение вертикального профиля температуры от линейного, a – число Прандтля, b – число Рэлея (разность температур верхних и нижних слоев), $c = 4/(1+a^2)$. В системе Лоренца хаотическая динамика проявляется в виде неперiodических колебаний с непредсказуемой амплитудой, например, при значениях параметров $a=10$, $c=8/3$ и $b > b^* = 407/19 \approx 21.42$ (порог хаоса). Ее фазовые портреты напоминают перекрученную восьмерку или бабочку, «летающую» вокруг трех неустойчивых равновесий и имеют фрактальный характер. Система Лоренца всегда имеет одно нулевое равновесие $x = y = z = 0$ (отсутствие конвекции) и при $b > 1$ еще два ненулевых $x = y = \pm [c(b-1)]^{1/2}$, $z = b - 1$ (устойчивая конвекция). При $a > c+1$ и $b > b^*$ (например, $b=28$) ненулевые равновесия принимают значения $x = y = \pm 6\sqrt{2} \approx \pm 8.5$, $z \approx 27$ и становятся неустойчивыми (также как и нулевое). При этом возникает хаотический режим (неустойчивая конвекция), которая легко воспроизводится в численном эксперименте.

К настоящему времени известны общие закономерности возникновения сложных неперiodических колебаний в динамических

системах, но многие свойства хаоса остаются неясными. Считается доказанным, что причиной возникновения хаотических колебаний является переход системы в область неустойчивости, а не большое число степеней свободы или флуктуации. Следствием этого является эффект «бабочки» (*butterfly effect*), т.е. чувствительность к малым возмущениям параметров и непредсказуемое поведение. Необходимым условием возникновения хаоса в непрерывной автономной системе считается наличие не менее двух степеней свободы (размерность не ниже 3D).

В свете этих представлений большой неожиданностью стало обнаружение сложной апериодической динамики в непрерывных автономных двумерных (2D) системах ОДУ с особенностью в нуле [5]. В работе [6] нами найдены и приведены новые, более простые, примеры таких моделей и показано, что они не противоречат теории динамических систем на плоскости. Возникает вопрос – какова же минимальная размерность хаотических систем? Для ответа на него рассмотрим и обсудим возможность описания хаотической динамики низкоразмерными 2D и даже 1D моделями.

Результаты и их обсуждение**Двумерные проекции модели хаоса.**

Системе автономных ОДУ можно поставить в соответствие несколько систем неавтономных ОДУ меньшей размерности (непрерывные проекции). Так автономной 3D модели $\dot{x}_t = f(x, y, z)$, $\dot{y}_t = g(x, y, z)$, $\dot{z}_t = h(x, y, z)$, где t – время, соответствуют три двумерные неавтономные системы, получаемые делением на любое из трех уравнений, например $\dot{x}_z = f(x, y, z)/h(x, y, z)$, $\dot{y}_z = g(x, y, z)/h(x, y, z)$ и рассматривая z как новое время. Аналогично получаются еще две непрерывные двумерные проекции $\dot{x}_y = f(x, y, z)/g(x, y, z)$, $\dot{z}_y = h(x, y, z)/g(x, y, z)$ и $\dot{x}_x = f(x, y, z)/f(x, y, z)$, $\dot{z}_x = h(x, y, z)/f(x, y, z)$, где x – новое время. Такое понижение размерности можно рассматривать как неавтономное преобразование с недифференцируемыми особенностями $h = 0$, $g = 0$ и $f = 0$ соответственно, которых не было в

исходной системе. Очевидно, что при построении любой из этих проекций теряется часть информации об исходной, полной системе. Соответственно, полностью восстановить эту информацию можно, рассматривая все проекции вместе. При этом множество особенностей совпадает с множеством равновесий исходной системы. Учитывая, что на системы с особенностями (сингулярные, негладкие) не распространяются базовые выводы теории динамических систем, от них можно ожидать более сложной динамики, чем релаксационные или многопериодические колебания.

Двухмерные проекции модели Лоренца. Понизим размерность трехмерной модели Лоренца на единицу, разделив первые два уравнения (2) на третье $x_z' = (-ax+ay)/(xy-cz)$, $y_z' = (bx-xz-y)/(xy-cz)$. Рассматривая z как новое время получим двумерную непрерывную неавтономную проекцию модели Лоренца с особенностью в знаменателе

$$\begin{aligned} x' &= (-ax+ay)/(xy-ct) \equiv P(x,y), \\ y' &= (bx-xt-y)/(xy-ct) \equiv Q(x,y). \end{aligned} \quad (3)$$

Эта двухмерная система ОДУ имеет единственное изолированное равновесие в нуле $x=y=0$, $t \neq b-1$, что соответствует отсутствию конвекции (в трехмерной системе). При критических значениях параметров $a=10$, $c=8/3$, $b=28$ и $t \neq 27$ это равновесие неустойчиво (седло в трехмерной системе). В двухмерной системе, если считать, что частные производные от t по x и y равны нулю, собственные числа определяются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, где $P_x = [a(ct-y^2)]/(xy-ct)^2$, $P_y = [a(-ct+x^2)]/(xy-ct)^2$, $Q_x = [-bct+t^2c+y^2]/(xy-ct)^2$, $Q_y = [ct-x^2(b-t)]/(xy-ct)^2$, $\sigma = [a(ct-y^2)+ct-x^2(b-t)]/(xy-ct)^2$, $\Delta = P_x Q_y - P_y Q_x$. В равновесии $\sigma_\infty = (a+1)/(ct) > 0$, $\Delta_\infty = a(1-b+t)/(ct)^2 > 0$ при $t > 27$ и собственные числа $\lambda_{1,2} = (a+1 \pm D^{1/2})/(2ct)$, где $D = (a-1)^2 + 4a(b-t) < 0$ при больших t . Следовательно, и с точки зрения 2D проекции, нулевое равновесие неустойчиво.

В двухмерной системе (3) обе производные отрицательны (траектории направлены внутрь фазового прямоугольника) при $x(b-t) < y < x$, для чего необходимо $x(b-t) < x$, что выполняется при $x > 0$, $b-t < 1$ (т.е. $t > 27$) или $x < 0$, $b-t > 1$ (т.е. $t < 27$). При $t=xy/c$ обе производные обращаются в бесконечность (недифференцируемая особенность), что соответствует попаданию трехмерной системы Лоренца в область неустойчивых ненулевых равновесий $x = y = \pm 6\sqrt{2}$, $z \approx 27$ (неустойчивой конвекции). Численное исследование подтверждает, что область сингулярности начинается при $t^* \approx 50$, когда текущие координаты удовлетворяют условию $t^* = xy/c$ (см. рис.1).

Как видно из рис. 1, двумерная непрерывная неавтономная проекция модели Лоренца «вроде бы» тяготеет к хаосу. Однако расчет показателей Ляпунова $L_1 \approx L_2 \approx -0.17$ показал, что при н.у. (1,1) наблюдаемый квазихаос не является «истинным» хаосом, а вызван погрешностями численного интегрирования. При вариации алгоритмов численного интегрирования, н.у. (0.1-0.5,1) и $b=30-$

50 старший показатель Ляпунова возрастал, но оставался отрицательным. При вариации н.у. около точки (35,70) он становился положительным и доходил до максимума $L_2 = 0.022$ при $L_1 = 0.002$, что свидетельствует о появлении «истинного» хаоса, но не исключает погрешностей вычислений. Контрольный численный расчет при хаотических значениях показателей Ляпунова «зависал» на больших временах (система (3) не интегрировалась) и сделать однозначный вывод о наличии «истинного» или «ложного» хаоса не удалось.

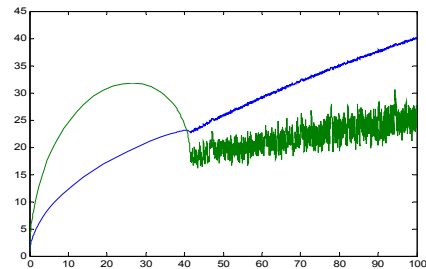


Рис. 1 – Зависимости $x(t)$, $y(t)$ для модели (3) при $a=10$, $b=28$, $c=8/3+10$

Аналогично можно построить и исследовать еще две непрерывные неавтономные двумерные проекции модели Лоренца, разделив другие два уравнения $x' = -ax+ay$, $y' = bx-xz-y$, $z' = xy-cz$ на третье и рассматривая третью переменную как новое время

$$\begin{aligned} x' &= (-ax+at)/(bx-xz-t), \quad z' = (xt-cz)/(bx-xz-t), \\ y' &= (bt-tz-y)/(-at+ay), \quad z' = (ty-cz)/(-at+ay). \end{aligned} \quad (4)$$

Одномерные проекции модели хаоса. Понизим порядок еще на один уровень, исключив следующую переменную, например z и полагая ее параметром z_0 , а y считая новым временем $y_x' = f/g$. Аналогично можно получить второй вариант $y_x' = 1/x_y'$. Перепишем любую из двух одномерных моделей в виде $x_t' \equiv f(x,t,z_0)$.

Неавтономная одномерная проекция модели Лоренца. Разделим первое из уравнений неавтономной двухмерной проекции (4) на второе, рассматривая y как новое время, а старое время – как параметр z_0 , получим дробно-линейное уравнение с особенностью в знаменателе

$$x' = (-ax+at)/(bx-xz_0-t) \equiv P(x). \quad (5)$$

Эта модель имеет единственное неизолированное равновесие $t=x$ при $x \neq 0$ и $t \neq bx-xz_0$. При критических значениях параметров $a=10$, $c=8/3$, $b=28$ и $t \neq 27$ это равновесие неустойчиво, т.к. $P_x = at(1-b+z_0)/(bx-xz_0-t)^2$. В равновесии $\sigma_\infty = a/(1-b+z_0x) > 0$ при $z_0 > b-1=27$. Производная отрицательна (траектории направлены внутрь фазового отрезка) при $(-x+t)(bx-xz_0-t) < 0$, т.е. при $t > x$, $t > x(b-z_0)$ или $t < x$, $t < x(b-z_0)$. При $t=x(b-z_0) = -7x$ (при $z_0=35$) ≈ 4.5 (при $x=-0.65$) обращается в бесконечность (недифференцируемая особенность), что соответствует попаданию трехмерной системы Лоренца в область неустойчивых ненулевых равновесий $x = y = \pm 6\sqrt{2}$,

$z \approx 27$ (неустойчивой конвекции). Результаты численного исследования приведены на рис. 2.

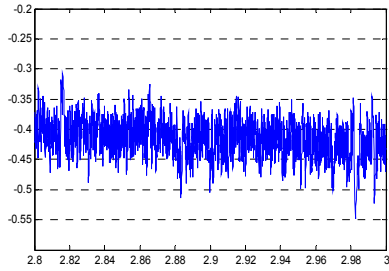


Рис. 2 – Зависимость $x(t)$ для модели (5) при $z_0=35$, н.у.=1

Анализ показал, что при малых значениях параметра z_0 система ведет себя квазилинейно. При этом единственный показатель Ляпунова оставался отрицательным $L_1 \approx -0.005$, что свидетельствует об отсутствии хаоса. С ростом z_0 появлялась тенденция к неустойчивости и возникал квазихаос, аналогичный квазихаосу в двухмерной непрерывной модели (3). При этом показатель Ляпунова становился положительным $L_1 \approx +0.005$, что свидетельствует о появлении «истинного» хаоса (но не исключает ошибок численного интегрирования и «ложного хаоса»).

Автономный непрерывный одномерный аналог проекции модели Лоренца. На основе приведенных выше неавтономных 2D моделей можно построить и автономные модели, считая время в правой части параметром. Заменим в неавтономной модели (5) время t на параметр y_0 и умножим первый терм, например на x (для обеспечения квадратичной нелинейности), получим дробно-квадратичное уравнение с особенностью в знаменателе, но уже автономное и не следующее напрямую из модели Лоренца

$$x_t' = (-ax^2 + ay_0)/(bx - xz_0 - y_0) \equiv P(x), \quad (6)$$

где y_0 – новый параметр. Проведем его качественный анализ. Это уравнение имеет до двух равновесий. При $y_0 > 0$ существует два вещественных равновесия с координатами $x_{1,2} = \pm \sqrt{y_0}$. Исследуем устойчивость. Якобиан $J(x) = P_x = a[2xy_0 - x^2(b - z_0) - y_0(b - z_0)]/(bx - xz_0 - y_0)^2$ в равновесиях $J(x_{1,2}) = 2ay_0 [\pm \sqrt{y_0} - (b - z_0)]/(bx - xz_0 - y_0)^2$ принимает значения $J(x_1) = -2a/(b - z_0 - \sqrt{y_0})$ и $J(x_2) = 2a/(-b + z_0 - \sqrt{y_0})$. При $b < z_0 - \sqrt{y_0}$ оба эти выражения положительны, а равновесия – неустойчивы. В этом случае в системе возможны сложные движения. В противном случае – одно из них устойчиво и движения становятся регулярными. При $y_0 = 0$ оба равновесия сливаются в одно. Анализ показал, что с ростом параметра z_0 качественная картина не изменялась. Автономная 1D непрерывная проекция модели Лоренца также демонстрировала хаотичные свойства, аналогичные непрерывным 3D и 2D моделям. При $y_0 < 0$ равновесия становятся мнимыми. Кроме того, в точке $x = y_0/(b - z_0)$ знаменатель правой части ОДУ (6) обращается в нуль и в системе возникает особенность, в которой производная не существует.

Этот особый случай аналогичен отсутствию вещественных корней в линейной системе [7-8].

Автономная кубическая 1D модель. Построим новую непрерывную автономную 1D модель, имеющую три равновесия (нелинейность) и особенность (неподвижную или подвижную), не используя каких-либо аналогов, например $x' = x(x-1)(x+1)/(x-c) = x(x^2-1)/(x-c) \equiv P(x)$. (7) Эта система имеет три изолированных равновесия $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$ и недифференцируемую изолированную подвижную особенность в точке $x=c$. Исследуем устойчивость. Производная $P_x = [2x^3 - c(3x^2 - 1)]/(x-c)^2$. Отсюда видно, что нулевое равновесие неустойчиво при $c > 0$. Положительное равновесие $x=1$ неустойчиво при $P_x = 2/(1-c) > 0$, т.е. при $c < 1$. Отрицательное равновесие $x=-1$ неустойчиво при $P_x = -2(1+c)/(x-c)^2 > 0$, т.е. при $c < -1$. Таким образом, если выбрать $0 < c < 1$, то оба неотрицательных равновесия будут неустойчивы. Если при этом выбрать и н.у. между этими равновесиями $x_0 \in [0, 1]$, $x_0 \neq c$, то получим – хаос! Результаты численного анализа ОДУ (7) при $c=1/2$ аналогичны предыдущим, т.е. показывают наличие хаоса. При попадании траектории в область сингулярности начинаются квазихаотические биения небольшой амплитуды, которую нетрудно увеличить до любых значений за счет растяжения координат. При этом уйти из этой области система не может, т.к. оба окружающих ее равновесия – неустойчивы. Расчеты при н.у. вне $t \in [0, 1]$ на отрезке $t \in [1, 2]$ показали, что ситуация не изменилась (хаос есть). Показатели Ляпунова для этой модели рассчитать не удалось. Таким образом, этот пример подтверждает, что малоразмерные системы ($\dim \leq 2$) могут демонстрировать сложное поведение, которое можно интерпретировать как хаос или квазихаос. Попытаемся найти дополнительные аргументы в пользу наличия-отсутствия хаоса в малоразмерных системах.

Проверка наличия хаоса. Уравнение (7) с н.у. не решается явно относительно x . Однако существует общее явное аналитическое решение относительно времени, причем линейное

$$2t = \ln[x^{2c}/(x-1)^{c-1}(x+1)^{c+1}] - 2C_1. \quad (8)$$

Табулирование решения (8) на отрезке $x \in [-10, 10]$ показало, что с ростом C_1 график не меняется качественно, а только смещается влево по оси времени. Одна (верхняя) ветвь $x \in [1, \infty]$ – вещественная, а остальные (две) – мнимые (физически не реализуемы), т.е. н.у. $t \approx 0$, $x \in [0, 1]$ отвечает режиму хаоса без равновесий.

Автономная квадратичная 1D модель. Рассмотрим еще более простую модель, имеющую только два равновесия и неподвижную или подвижную особенность, например

$$x' = (x-1)(x+1)/x = (x^2-1)/(x-c) \equiv P(x). \quad (9)$$

Координаты изолированных равновесий $x_1=1$, $x_2=-1$. При $c=0$ (неподвижная особенность в нуле) производная $P_x = (x^2+1)/x^2$ всегда положительна (кроме особой точки), т.е. оба равновесия неустойчивы. Более того, в этом случае система неустойчива при любых x . При $c \neq 0$ (подвижная

особенность в любой точке) производная $P_x = (x^2 - 2xc + 1)/(x - c)^2$ отрицательна только при $x_1 < x < x_2$, $-1 < c < 1$, где $x_{1,2} = c \pm \sqrt{D}$, $D = c^2 - 1$ (устойчивость) и положительна в остальных случаях (неустойчивость). В положительном равновесии $P_x = 2/(1 - c)$, т.е. оно неустойчиво при $c < 1$. В отрицательном равновесии $P_x = 2(1 + c)/(1 - c)^2$, т.е. оно неустойчиво при $c > -1$. Следовательно, в этом случае, в интервале $-1 < c < 1$ оба равновесия не устойчивы и хаос возможен при $x < x_1$ или $x > x_2$. Результаты численного решения ОДУ (8), приведенные на рис. 3 ($x_1 = c \pm \sqrt{D}$, $x_{1,2} = c \pm \sqrt{D}$), аналогичны решению ОДУ (7).

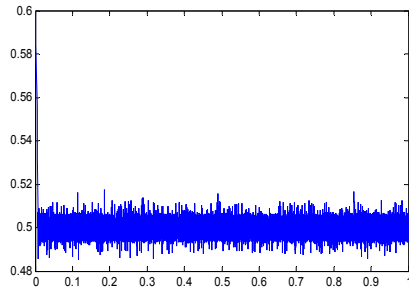


Рис. 3 – Зависимость $x(t)$ для модели (9) при $c=1/2$, $n.u.=0.6$

Проверка наличия хаоса. Общее решение ОДУ (9) можно записать в виде

$$2t = \ln[(x+1)^{c+1}/(x-1)^{c-1}] - 2C_1. \quad (10)$$

Табулирование выражения (10) на отрезке $x \in [-10, 10]$ показало, что с ростом C_1 , также как в предыдущем примере, зависимость $x(t)$ не меняется качественно: н.у. $t \approx 0$, $x \in [0, 1]$ отвечают режиму хаоса без равновесий.

Инварианты. Различные замены координат в ОДУ (9) позволяют получить следующие ее одномерные инварианты, сохраняющие свойство хаотичности:

- замена $x = ay + b$ приводит к ОДУ

$$y' = [(ay + b)^2 - 1] / [a(ay + b - c)]; \quad (11)$$

- замена $x = ay^2 + b$ приводит к ОДУ

$$y' = [(ay^2 + b)^2 - 1] / [2ay(ay^2 + b - c)]; \quad (12)$$

- замена $x = a/y + b$ приводит к ОДУ

$$y' = -y^2[(a/y + b)^2 - 1] / [a(a/y + b - c)]. \quad (13)$$

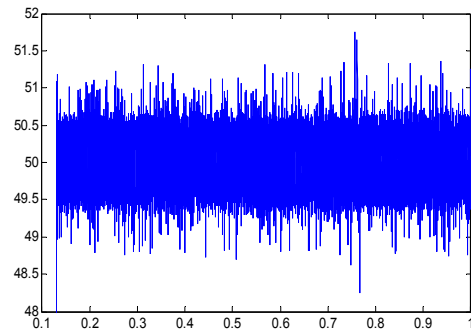


Рис. 4 – Зависимость $x(t)$ для модели (11) при $a=0.01$, $b=0$, $c=1/2$

Таким образом, вопрос о том, может ли «истинный» хаос описываться одномерными ОДУ, до конца остается не решенным. Из результатов проведенных выше исследований следует – с помощью одномерных ОДУ можно описать квазихаотическое (непредсказуемое) поведение, обусловленное двумя причинами (по аналогии с моделями Диксона [5]): ограничивающей областью неустойчивости и недифференцируемой особенностью внутри этой области. В этом смысле можно считать, что хаос может быть описан одномерными ОДУ, т.е. более простыми моделями хаоса, чем описанные в работах [1, 5].

Литература

1. E.N. Lorenz, *Journal of Atmospheric Science*, **20**, 130-141 (1963).
2. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966. 568 с.
3. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*, Наука, Москва, 1967. 384 с.
4. А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина, *Введение в физику нелинейных отображений*, Научная книга, Саратов, 2010. 134 с.
5. D.D. Dixon, F.W. Cummings, P.E. Kaus, *Phys. Nonlinear Phenom.*, **65**, 109-116 (1993).
6. В.Х. Федотов, Н.И. Кольцов, *Вестник Казан. технол. ун-та* (2014), в печати.
7. В.Х. Федотов, Н.И. Кольцов, *Вестник Казан. технол. ун-та*, **16**, 23, 7-9 (2013).
8. В.Х. Федотов, Н.И. Кольцов, *Вестник Казан. технол. ун-та*, **16**, 23, 10-12 (2013).

© В. Х. Федотов – канд. хим. наук, доц. каф. информационных систем ЧувГУ, fvh@inbox.ru; Н. И. Кольцов – д-р хим. наук, проф. каф. физической химии и ВМС ЧувГУ, koltsovni@mail.ru.

© V. H. Fedotov - PhD, assistant professor of ChuvGU, fvh@inbox.ru; N. I. Koltsov - Doctor of Chemical Sciences, prof. of ChuvGU, koltsovni@mail.ru.