

УДК 539.3

Д. В. Бережной, М. К. Сагдатуллин

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ МЕТРОПОЛИТЕНА, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ГРУНТЕ, С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*Ключевые слова: метод конечных элементов, контактные задачи, грунты.*

*Построена конечно-элементная методика расчета деформирования обделки тоннеля метрополитена, взаимодействующей с сухими грунтами. Для моделирования взаимодействия между элементами расчетной области используется специальный «контактный» конечный элемент, позволяющий учесть все случаи взаимодействия контактирующих поверхностей. Решен ряд задач деформирования кольца обделки тоннеля метрополитена, в том числе и состоящего из отдельных контактирующих между собой блоков, расположенного в грунте. Показана необходимость решения контактной задачи для моделирования взаимодействия бетонных блоков кольца обделки.*

*Keywords: a method of finite elements, contact problems, soils.*

*The finite and element method of calculation of deforming of underground tunnel lining, interacting with dry soil is constructed. For interaction simulation between elements of estimated area the special "contact" terminal element, allowing considering all cases of interaction of contacting surfaces is used. A number of tasks of deforming of a ring lining of a tunnel of the subway, including consisting of the separate units contacting among themselves, located in soil is solved. Need of the solution of the contact task for simulation of interaction of concrete units of a ring lining is shown.*

#### Введение

В процессе строительства и эксплуатации тоннелей метрополитена из-за сложного рельефа грунта иногда может происходить просадка тоннелей (в связи с вымыванием грунтовыми водами слабосвязанных грунтов), в результате чего блоки обделки тоннелей трескаются, причем в нескольких местах. Сквозные трещины проходят вдоль оси тоннеля, и они практически всегда расположены в верхних и боковых блоках. Прочность обделки сохраняется за счет стальной арматуры в блоках и заклинивания частей блоков. Поэтому фактически необходимо провести расчеты для определения влияния появившихся продольных трещин в блоках обделки тоннеля на прочность конструкции (т.е. определить влияние появившихся в результате просадки трещин в блоках обделки тоннеля на возникновение новых трещин) и определить возникающие дополнительные усилия в стальной арматуре. Обделка тоннеля метрополитена составная, при деформировании ее составные части взаимодействуют между собой и с грунтом.

При решении задач подобного типа задача чаще всего применяют методики расчета нелинейного деформирования элементов конструкций [1-4] с учетом их контактного взаимодействия в рамках конечно-элементного анализа [5-8]. Кроме того, в рамках расчетной схемы обычно применяют подкрепленные и специальные конечные элементы, которые учитывают арматуру и геометрическую неоднородность конструкции [9,10].

В работе дана постановка задачи контактного взаимодействия трехмерных элементов

конструкций, расположенных в грунте, описан контактный конечный элемент со специфическими свойствами, позволяющий реализовывать все возможные ситуации сдвига и отрыва контактирующих поверхностей, решена задача деформирования кольца обделки тоннеля метрополитена, расположенного в сложном многослойном грунте, проведены сравнения с результатами натуральных экспериментов.

#### 1. Моделирование механического контакта

Для моделирования механического контакта используется специальный контактный элемент [5,6], позволяющий учесть возможность различные случаи взаимодействия между собой контактирующих поверхностей, в частности, отрыва, проскальзывания с трением и т.д.

Общее разрешающее уравнение деформирования подконструкций с учетом механического контакта в вариационной форме имеет вид

$$\sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} \{\sigma_H\}^T \{\delta\varepsilon_H\} d\Omega = \sum_m \left( \iiint_{\Omega_m} \rho \{g\}^T \{\delta V\} d\Omega + \iint_{S_m^\sigma} \{P\}^T \{\delta V\} dS \right), \quad (1)$$

где сумма по  $m$  - сумма по объемам блоков, по  $k$  обозначается сумма по накладкам,  $\Omega_m, \Omega_k$  - соответственно объемы блоков и накладок;  $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{V\}$  - напряжения, деформации и перемещения элементарных объемов блоков;  $\{\sigma_H\}, \{\varepsilon_H\}$  - напряжения и деформации в накладках,  $\{g\}$  - вектор ускорения свободного

падения ( $\rho\{g\}$  - сила тяжести),  $\{P\}$  - граничная нагрузка, действующая на части границы  $S_m^\sigma$ .

Будем считать, что первоначальное обжатие контактного конечного элемента всегда существует.

Для решения нелинейной задачи на базе уравнения (1) используется итерационный метод, являющийся комбинацией метода начальных напряжений и метода дополнительной деформации. Базовым для определения  $k$ -ой итерации является следующее вариационное уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\sigma^k\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\varepsilon_H^k E_H \delta\varepsilon_H + \\ & + \gamma_H^k G_H \delta\gamma_H) d\Omega_k = \sum_m \left( \iiint_{\Omega_m} \rho\{g\}^T (\delta V) d\Omega + \right. \\ & \left. + \iint_{S_m^\sigma} \{p\}^T \{\delta V\} ds \right) + \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\bar{\sigma}_H^k \delta\varepsilon_H + \bar{\tau}_H^k \delta\gamma_H) d\Omega_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где величины  $\bar{\sigma}_H^k$  и  $\bar{\tau}_H^k$  в (2) являются "начальными напряжениями".

Для реализации описанной в предыдущем параграфе математической модели взаимодействия накладок в рамках МКЭ удобно определить так называемый контактный элемент.

Вводятся аппроксимации лицевых поверхностей

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(-)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_{2i-1} N_i(\xi, \eta), \\ \bar{r}^{(+)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_{2i} N_i(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N_i(\xi, \eta)$  - известные функции формы для двумерной аппроксимации. Для аппроксимации вектора перемещений будем использовать представление, аналогичное (3), т.е. введем

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(-)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{v}_{2i-1} N_i(\xi, \eta), \\ \bar{v}^{(+)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{v}_{2i} N_i(\xi, \eta). \end{aligned}$$

В процессе деформирования первоначально параллельные лицевые поверхности  $\bar{r}^{(-)}$  и  $\bar{r}^{(+)}$  перестают быть таковыми и степень их относительных поворотов в процессе деформирования может достигать большой величины. Поэтому все геометрические, кинематические и силовые характеристики будем определять на обеих лицевых поверхностях самостоятельно. Другими словами, напряженно-деформированное состояние будем определять самостоятельно в каждой накладке (примыкающих, соответственно, к поверхностям  $\bar{r}^{(-)}$  и  $\bar{r}^{(+)}$ ), что позволит более верно моделировать их состояние при проскальзывании друг относительно друга.

Используемая итерационная процедура типа "метода начальных напряжений" представляет собой следующую последовательность действий. Первое приближение определяется из решения вариационного уравнения принципа виртуальных

перемещений в предположении справедливости закона Гука:

$$\begin{aligned} & \sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k = \\ & = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k \end{aligned}$$

где  $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$  - векторы напряжений и деформаций на  $k$ -ом трехмерном фрагменте грунта;  $\{Q\}, \{P\}$  - векторы массовой и поверхностной нагрузок.

В данном уравнении предполагается, что кинематические связи между фрагментами (условия непрерывности перемещений) и кинематические граничные условия выполняются априори. Уравнения равновесия для каждого фрагмента, статические условия сопряжения и статические граничные условия выполняются автоматически в интегральном смысле.

В этом случае разрешающее уравнение линейно и записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_k \iiint_{V_k} \{\varepsilon^{(1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k = \\ & = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k \end{aligned}$$

Все последующие шаги итераций основаны на линейных уравнениях для приращений

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma_H^{(k)}\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k,$$

из решения которых находятся

$$\{\Delta u^{(k+1)}\}, \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}, \{\Delta\sigma^{(k+1)}\} = [D] \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}. \quad (4)$$

Истинное деформированное состояние определяется как

$$\{u^{(k+1)}\} = \{u^{(k)}\} + \{\Delta u^{(k+1)}\}, \{\varepsilon^{(k+1)}\} = \{\varepsilon^{(k)}\} + \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}.$$

"Пробные" напряжения для анализа возможного предельного состояния и определения истинных и дополнительных напряжений находятся как

$$\{\sigma^{(k+1)}\} = \{\sigma_T^{(k)}\} + \{\Delta\sigma^{(k+1)}\}, \quad (5)$$

где  $\{\sigma_T^{(k)}\}$  - истинные напряжения, соответствующие принятой теории прочности. Для их вычисления по напряжениям (5) строится "упругопластическая матрица" и определяются

$$\{\sigma_T^{(k+1)}\} = \{\sigma_T^{(k)}\} + [D_{ep}^{(k+1)}] \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}. \quad (6)$$

В правой части уравнения (4) фигурируют так называемые "начальные" или "дополнительные" напряжения, которые вводятся как разности "пробных" напряжений (5) и истинных (6)

$$\{\Delta\sigma^{(k+1)}\} = \{\sigma^{(k)}\} - \{\sigma_T^{(k+1)}\}.$$

Переход от вариационной задачи к алгебраической производится посредством дискретизации методом конечных элементов.

## 2. Геометрическое и механическое моделирование задачи

Решается задача упругого деформирования бетонного кольца обделки метрополитена,

расположенного в толще грунтового массива. Предполагается, что кольцо обделки, поперечное сечение которого показано на рис. 1, состоит из восьми сегментных блоков, соединенных друг с другом посредством резиновых вставок.

В общем случае взаимное расположение сегментных блоков в кольце обделки (по сути дела положение замкового блока А) может быть произвольным. На рис. 1а приведен случай нижнего расположения замкового блока с нумерацией блоков и стыков между ними.

Замковой блок А имеет угол раскрытия 16.363636 градуса, а призамковые блоки В и основные блоки С имеют угол раскрытия 49.090909 градуса. В расчете принимается, что блоки В и С являются идентичными, а стыковка всех блоков производится одинаково.

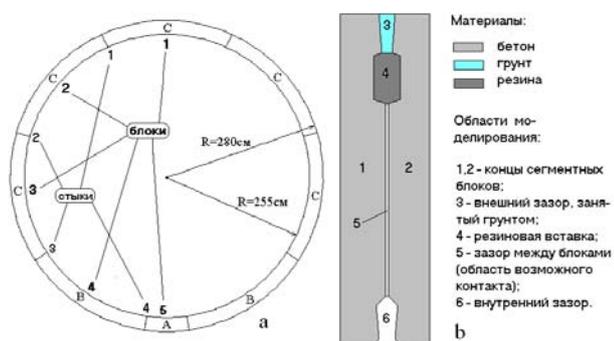


Рис. 1 – Схема разбиения обделки на блоки и схема зоны стыка блоков

Рис.1б иллюстрирует взаимное расположение резиновой вставки и концов сегментных блоков при их стыковке. Принимается, что в начальном положении блоки расположены друг относительно друга на расстоянии 2 мм, а зазоры между блоками по внешнему периметру обделки заполнены окружающими кольцо обделки грунтовыми массами.

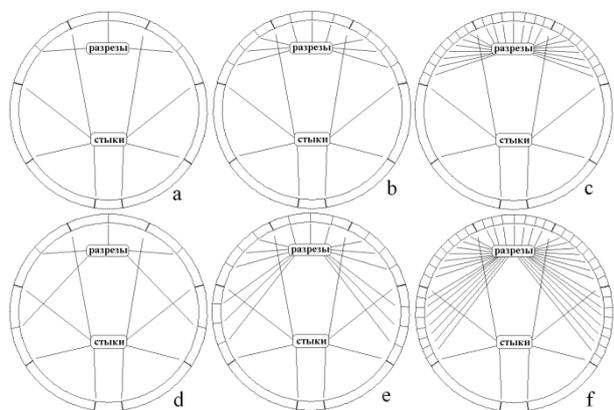


Рис. 2 – Схемы растрескивания блоков

Расчет проводится в два этапа.

На первом этапе решается задача деформирования блоков обделки тоннеля при их

взаимодействии с окружающим грунтом под действием собственного веса (грунта и обделки).

На втором этапе решается задача трансформирования расчетной области при мгновенном появлении трещины (или трещин) в некоторых блоках обделки. Фактически, на этом этапе решения исключаются из рассмотрения элементы трещины (разреза), то есть модифицируется глобальная матрица жесткости конструкции и происходит перераспределение равновесного состояния с учетом геометрической нелинейности. Варианты возможного растрескивания блоков приведены на рис. 2.

Расчет проводится на основе двумерных квадратичных 8-узловых конечных элементов сплошной среды Серендипова семейства, узловыми неизвестными которого являются проекции вектора перемещений на координатные оси рабочей плоскости.

Считается, что конструкция работает в условиях плоской деформации, а влияние арматуры учитывается путем осреднения ее прочностных свойств по длине тоннеля. На рис.3 приведена схема расположения основных пучков арматуры в обычных (В и С) и замковом (А) блоках обделки соответственно. Расчетная схема предусматривает возможность смыкания бетонных блоков обделки в процессе деформирования.

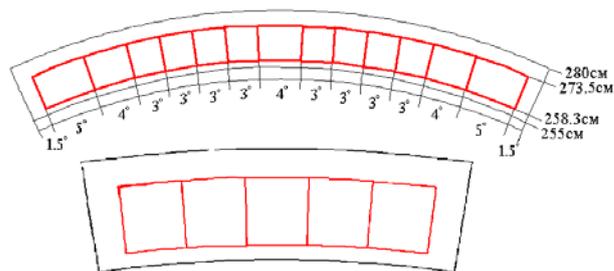


Рис. 3 – Схемы расположения арматурных пучков в бетонных блоках.

Таблица 1 – Механические характеристики материалов расчетной области

Материал или грунт	$\gamma_c$ [кг/м <sup>3</sup> ]	$E$ , [Мпа]	$\mu$
Стальная арматура	7800	200000	0.3
Резина	1000	2	0.48
Бетон	2500	35000	0.2
Насыпной грунт неоднородный (НС)	1850	4	0.35
Глина полутвердая (2А)	1960	20	0.42
Глина мягко-пластичная (2В)	1940	7	0.42
Суглинок твердый, полутвердый (3А)	1980	6.7	0.35
Супесь пластичная (4А)	2060	4.5	0.30
Супесь текучая (4Б)	2010	4.5	0.30
Песок пылеватый водонасыщенный (5А)	2040	22	0.30
Песок мелкий водонасыщенный (6А)	2030	33	0.30
Песок средней крупности водонасыщенный (7А)	1990	33	0.30
Песок гравелистый водонасыщенный (8А)	2070	40	0.30

Разрез грунтов на первом аварийном участке приведен на рис. 4.

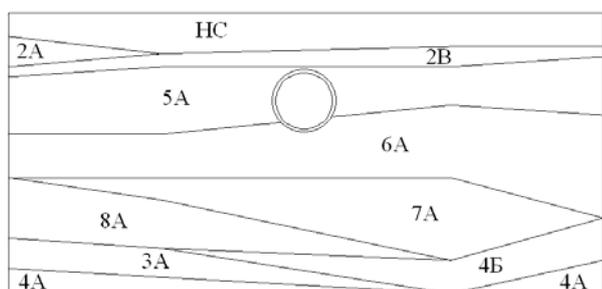


Рис. 4 –Разрез первого аварийного участка

Кинематические граничные условия определяются следующим образом:

- по боковым границам задается отсутствие горизонтальных смещений.
- по нижней границе определяются нулевые вертикальные смещения.

### 3. Результаты расчетов

В табл.2 приведены максимальные окружные напряжения в бетоне и в арматуре для трех аварийных участков. Можно отметить, что максимальные сжимающие напряжения в арматуре всегда возникают во внешнем пучке арматуры (ближе к наружной поверхности тоннеля) в верхнем блоке в вертикальном (центральном) разрезе.

Таблица 2 –Окружные напряжения в бетоне и сжимающие напряжения в арматуре в зоне трех аварийных участков

Вариант расчета (растрескивания)	$\sigma_{окр}^{max}$ в бетоне [кГ/см <sup>2</sup> ]	$\sigma_{окр}^{min}$ в бетоне [кГ/см <sup>2</sup> ]	$\sigma_{окр}^{max}$ в арматуре [кГ/см <sup>2</sup> ]
Первый аварийный участок			
(рис. 1а)	8.30	-12.1	-324
3-1 (рис.2а)	5.18	-8.76	-618
3-3 (рис.2б)	5.11	-8.75	-610
3-7 (рис.2с)	4.59	-8.64	-598
5-1 (рис.2д)	5.17	-10.36	-623
5-3 (рис.2е)	5.10	-10.27	-611
5-7 (рис.2ф)	4.61	-10.09	-600
Второй аварийный участок			
(рис. 1а)	7.49	-11.2	-299
3-1 (рис.2а)	5.14	-9.04	-739
3-3 (рис.2б)	4.88	-8.67	-718
3-7 (рис.2с)	4.43	-8.54	-702
5-1 (рис.2д)	5.02	-9.93	-741
5-3 (рис.2е)	4.87	-9.81	-721
5-7 (рис.2ф)	4.41	-9.72	-703
Третий аварийный участок			
(рис. 1а)	6.56	-10.8	-290
3-1 (рис.2а)	5.12	-8.76	-709
3-3 (рис.2б)	4.71	-8.69	-702
3-7 (рис.2с)	4.38	-8.53	-682
5-1 (рис.2д)	4.94	-10.14	-711
5-3 (рис.2е)	4.72	-10.03	-694
5-7 (рис.2ф)	4.43	-9.92	-685

Можно отметить, что рассматривались напряжения в некотором удалении от стыков трещин (разрезов).

### Заключение

Для задачи деформирования обделки тоннелей метрополитена, представленной в виде блочного кольца с учетом контактного взаимодействия между блоками, находящейся под действием веса грунтовых массивов и деформирующей в результате внезапного растрескивания, определены окружные напряжения в блоках обделки и растягивающие напряжения в арматуре. Материал арматуры не переходит в пластическое состояние. Появление трещин в некоторой степени понижает уровень напряжений в бетонных блоках обделки тоннелей. Как показывают расчеты, наиболее опасным с точки зрения прочности является участок тоннеля в зоне первого аварийного участка.

Предложенный метод решения задач механики с конкретными приложениями относится к современной технологии научного сопровождения, проектирования и строительства сложных объектов. Его использование позволяет проследить за изменением напряженно-деформированного состояния и поля перемещений структурно изменяющейся расчетной области от начала и до конца строительства. Это позволяет более точно и технически грамотно принимать проектные решения для различных этапов строительных работ, что зачастую нельзя сделать, опираясь только на существующие СНиПы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-01-00955, № 12-01-97026, № 12-01-31212, № 13-97057, № 13-01-97058.

### Литература

1. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Postbuckling elastoplastic state analysis of three-dimensional bodies taking into account finite strains. – Russian Aeronautics. – 2008. – Т. 51. – № 4. С. 362-368. Volume 51, Issue 4, 2008, Pages 362-368. doi: 10.3103/S106879980804003X
2. Badriev, I.B., Banderov, V.V., Zadvornov, O.A. On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // (2013) Applied Mechanics and Materials, 392, pp. 188-190.
3. Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. Моделирование поведения и оценка Несущей способности системы тонкостенная конструкция-грунт с учетом ползучести и деградации грунта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2011. — Т.153, №4. — С.67–75.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987, 542 с.
5. Бережной Д.В., Голованов А.И., Луканкин С.А., Секаева Л.Р. Моделирование поведения железобетонной обделки тоннеля в деформируемом грунте с учетом одностороннего контактного взаимодействия ее блоков через упругие прокладки // Вестник Казанского государственного технического университета, 2010, №2, С.4-9.
6. Бережной Д.В., Кузнецова И.С., Саченков А.А. Моделирование пластического деформирования многослойного грунта в зоне опоры многопролетного

- моста // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 116-125.
7. *Бережной Д.В., Карамов А.В., Сагдатуллин М.К.* Моделирование деформирования поэтапной выемки грунта при строительстве подземных сооружений // Вестник Казанского государственного технологического университета. – 2012. – №17. – С.137-145.
8. *Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Султанов Л.У.* Моделирование деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенной в грунте сложной физической природы // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 9. С. 250-255.
9. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань, 2001, 300 с.
10. *Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Саченков А.А.* Универсальный конечный элемент для расчета комбинированных конструкций // Вестник Казанского государственного технологического университета. – 2012. – №17. – С.150-157.

---

© **Д. В. Бережной**– канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики, Казанский федеральный университет, berezhnoi.dmitri@mail.ru; **М. К. Сагдатуллин** – канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и сопротивления материалов, Казанский национальный исследовательский технологический университет, ssmarat@mail.ru.

© **D. V. Berezhnoi**–candidate of physico-mathematical sciences, associate professor Department of Theoretical Mechanics, Kazan federal university, berezhnoi.dmitri@mail.ru; **M. K. Sagdatullin**–candidate of physico-mathematical sciences, associate professor department of theoreticalmechanics andstrength of materials, Kazan National Research Technological University, ssmarat@mail.ru.