Вестник технологического университета. 2024. Т.27, №11

УДК 519.852 *DOI 10.55421/1998-7072_2024_27_11_206*

С. И. Носков, С. В. Беляев

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: регрессионная модель, идентификация параметров, метод уступок, методы наименьших модулей и антиробастного оценивания, задача линейного программирования, химическая промышленность.

В работе дан краткий обзор публикаций по применению в силу различных причин формального и (или) содержательного характера нескольких специализированных методов, в том числе для оценивания параметров, при разработке одной регрессионной модели. В частности, рассмотрены: новая модифицированная двухпараметрическая оценка параметров регрессионной модели, основанная на предварительной информации для вектора параметров, чтобы обойти проблему мультиколлинеарности; методы оценки параметров обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на подходе локального сглаживания и принципе псевдонаименьших квадратов в рамках погрешности измерения в регрессионных моделях; улучшенные стратегии оценки для матрицы параметров в многомерной множественной регрессии при общем и естественном линейном ограничении; исследование свойств малой выборки для трех различных методов оценивания параметров регрессионных моделей с коррелированными бинарными откликами; методологические и теоретические подходы для моделей с переменными коэффициентами. Разработан алгоритмический способ последовательного использования нескольких методов оценивания неизвестных параметров в общем случае нелинейной регрессионной модели, основанный на применении известного в теории принятия решений метода уступок. Базисным условием его привлечения является возможность упорядочения методов идентификации (а, значит, и соответствующих функций потерь) по предпочтительности, основанного на опыте, знаниях, индивидуальных пристрастиях исследователя и свойствах обрабатываемой выборки данных. Этот способ предполагает решение нескольких оптимизационных задач. При использовании методов наименьших модулей и антиробастного оценивания их последовательное применение приводит к необходимости решения двух задач линейного программирования. Построены четыре версии линейной регрессионной модели развития химической промышленности Российской Федерации. В качестве единственной независимой переменной задействован объем прямых инвестиций в отрасль.

S. I. Noskov, S. V. Belyaev

CONSISTENT APPLICATION OF PARAMETER ESTIMATION METHODS IN THE CONSTRUCTION OF REGRESSION MODELS

Key words: regression model, parameter identification, concession method, least absolute value and antirobust estimation methods, linear programming problem, chemical industry.

The paper provides a brief overview of publications on the application, due to various reasons of formal and (or) substantive nature, of several specialized methods, including those for estimating parameters, in developing a single regression model. In particular, the following are considered: a new modified two-parameter estimate of regression model parameters based on preliminary information for the parameter vector in order to circumvent the problem of multicollinearity; methods for estimating parameters of ordinary differential equations based on the local smoothing approach and the pseudo-least squares principle within the framework of measurement error in regression models; improved estimation strategies for the parameter matrix in multivariate multiple regression with general and natural linear constraints; a study of small sample properties for three different methods of estimating parameters of regression models with correlated binary responses; methodological and theoretical developments for models with variable coefficients. An algorithmic method for sequentially using several methods for estimating unknown parameters in the general case of a nonlinear regression model is developed, based on the application of the concession method, well known in decision theory. The basic condition for its use is the possibility of ordering identification methods (and, therefore, the corresponding loss functions) by preference, based on experience, knowledge, individual preferences of the researcher and the properties of the processed data sample. This method involves solving several optimization problems. When using the methods of least modules and anti-robust estimation, their consistent application leads to the need to solve two linear programming problems. Four versions of the linear regression model of development of the chemical industry of the Russian Federation are constructed. The volume of direct investments in the industry is used as the only independent variable.

Введение

При построении математических конструкций регрессионного типа для сложных объектов исследователи часто в силу различных причин формального и (или) содержательного характера вынуждены применять несколько специализированных методов, в том числе для оценивания параметров, при разработке одной модели. Так, в работе [1] утверждается, что в гребневой регрессии параметр гребня или константа смещения играют важную роль в оценке параметров, и исследователи часто меняют ее несколько раз при построении одной модели. Предлагается новый метод выбора параметра гребня. Его эффективность оценивается и сравнивается с результатами имитационного исследования с точки зрения среднеквадратической ошибки. В [2] отмечается, что опасность выпадающих наблюдений, как в направлении зависимых, так и объясняющих переменных, для регрессии заключается в том, что они могут оказать сильное неблагоприятное влияние на оценки параметров и остаться незамеченными. Поэтому были разработаны статистические методы, которые способны справляться с выпадающими наблюдениями, или обнаруживать их. В работе анализируется поведение выбросов в линейной регрессии и сравниваются некоторые надежные по отношению к выбросам методы с помощью имитационного исследования. В статье [3] предлагается новая модифицированная двухпараметрическая оценка параметров регрессионной модели, основанная на предварительной информации для вектора параметров, чтобы обойти проблему мультиколлинеарности. Эта новая оценка включает в себя особые случаи обычной оценки метода наименьших квадратов (МНК), гребневой оценки, оценки Лю, модифицированной гребневой оценки и модифицированной оценки Лю. Исследование [4] посвящено разработке методов оценки параметров обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на подходе локального сглаживания и принципе псевдонаименьших квадратов в рамках погрешности измерения в регрессионных моделях. Устанавливаются асимптотические свойства предлагаемой оценки.

В работе [5] предлагается обзор последних непараметрических методов оценки плотности и регрессионных функций. Описанные методы позволяют исследователю оценить регрессионную функцию или плотность без необходимости заранее указывать конкретную и, следовательно, потенциально неверную функциональную форму. Эти методы сравниваются с более популярными параметрическими альтернативами, в том числе с методом наименьших квадратов. В [6] рассматриваются улучшенные стратегии оценки для матрицы параметров в многомерной множественной регрессии при общем и естественном линейном ограничении. В контексте двух конкурирующих моделей, где одна включает все предикторы, а другая ограничивает переменные коэффициенты кандидатным линейным подпространством на основе априорной информации, необходимо оптимально объединить два метода оценки. В публикации [7] представлены результаты имитационного исследования, разработанного для оценки свойств малой выборки для трех различных методов оценивания параметров регрессионных моделей с коррелированными бинарными откликами. Рассматриваемые процедуры оценки включают: оценку максимального правдоподобия с использованием квадратуры Гаусса-Эрмита, методы обобщенных оценочных уравнений и подход MECOSA (анализ структуры среднего и ковариации), предложенный Шеперсом. В [8] сделан обзор существующих методологических и теоретических разработок для моделей с переменными коэффициентами и проведено обсуждение их расширений с некоторыми новыми разработками. Они предназначены для гибкой формы моделей с переменными коэффициентами, которая требует сглаживания в различных пространствах ковариат и основана на методе гладкой обратной подгонки, признанным мощным средством подгонки структурных регрессионных моделей, что, как известно, освобождает от проклятия размерности.

Интересные в рамках данной проблематики результаты получены в работах: [9] (задача минимаксного оценивания в модели линейной регрессии при поэлементных ограничениях на ковариационную матрицу вектора случайных параметров), [10] (оценивание параметров регрессионной модели в случае, когда подвекторы вектора ошибок имеют многомерное эллиптическое распределение, а их ковариационные матрицы представлены в виде кронекерова произведения нескольких положительно определенных матриц), [11] (методы оценивания и тестирования моделей коинтеграции и коррекции ошибок), [12] (сочетание средств статистик Неймана-Пирсона и Байеса с интегральной визуализацией когнитивных образов для обработки многомерных данных астрономических наблюдений), [13] (задачи структурной и параметрической идентификации когнитивных моделей), [14] (исследование асимптотического поведения одношаговых взвешенных М-оценок, построенных по выборке независимых, необязательно одинаково распределенных, случайных величин).

Целью настоящей работы является применение известного в теории многокритериальной оптимизации метода уступок при оценивании неизвестных параметров в общем случае нелинейной регрессионной модели для обеспечения возможности последовательного использования нескольких методов идентификации.

Применение метода уступок при оценивании параметров регрессионной модели

Рассмотрим регрессионную модель (зависимость) вида [15]:

$$y_k = F(\alpha; x_{k1}, \ldots, x_{km}) + \varepsilon_k, \ k = \overline{1, n}, \qquad (1)$$

где y – зависимая, а $x_1, \ldots, x_m$ – независимые переменные (предикторы), k – номер наблюдения, n – длина выборки, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ - вектор оцениваемых параметров, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ - ошибки аппроксимации. При этом будем придерживаться рамок аппроксимационного (логико-алгебраического) подхода к анализу данных, не делая никаких предположений об их вероятностной природе. Аппроксимирующая вещественная функция F может иметь как линейный, так и существенно нелинейный характер.

В настоящее время в регрессионном анализе существует огромное количество методов идентификации вектора неизвестных параметров α модели (1) (см,. например, краткий обзор в [16], а также [17, 18]). В частности, активно применяются методы поиска L_v–оценок, являющихся результатом минимизации функций потерь вида [19]:

$$J_v(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k|^v, \ \ v \geq 1. \qquad (2)$$

При $v = 2$ функция (2) соответствует МНК, при $v = 1$ - методу наименьших модулей (МНМ), при $v \to$

∞ - методу антиробастного оценивания (МАО) [16]. Отметим, что имеет место соотношение:

$$J_\infty(\alpha) = \max_{k=1,n}|\varepsilon_k|.$$

Пусть при построении модели (1) в распоряжении исследователя имеется Р методов оценивания ее параметров, каждому из которых соответствует своя функция потерь $I^j(\alpha)$, $j = \overline{1,P}$. В качестве некоторых $I^j(\alpha)$ могут, в частности, использоваться функции $J_\nu(\alpha)$. При этом исследователь заинтересован в применении по возможности всех имеющихся в его арсенале методов. Это можно сделать, в том числе, путем применения метода множественного оценивания [20], состоящего в построении множества паретовских (недоминируемых) оценок.

Другой возможный и весьма эффективный способ «задействования» всех функций потерь при построении модели (1) может базироваться на привлечении известного в теории принятия решений метода уступок [21, 22]. Его суть заключается в следующем.

Пусть исследователь, исходя из своего опыта, знаний, индивидуальных пристрастий, а также свойств обрабатываемой выборки данных может все имеющиеся в его распоряжения методы идентификации параметров (а, значит, и соответствующие им функции потерь) упорядочить по предпочтению (убыванию значимости), например, следующим образом:

$$I^1(\alpha) \succcurlyeq I^2(\alpha) \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq I^P(\alpha),$$

где $\succcurlyeq$ - отношение нестрогого предпочтения.

Реализация метола уступок заключается в организации итерационной процедуры, в рамках которой производится последовательная оптимизация каждой очередной функции потерь на множестве допустимых векторов, сформированном на предыдущей итерации. Формально эта процедура представима следующим образом.

Пусть $\bar{I}^1 = \min_{\alpha \in R^l} I^1(\alpha)$. Будем считать, что исследователь может назначить некоторую уступку $\delta^1>0$, на которую он может пойти по функции $I^1(\alpha)$ с тем, чтобы оптимизировать остальные функции потерь. Таким образом, формируется множество M^1:

$$M^1 = \{\alpha \in R^l | \ I^1(\alpha) \le \bar{I}^1 + \delta^1\}.$$

После этого решается задача оптимизации:

$$\bar{I}^2 = \min_{\alpha \in M^1} I^2(\alpha),$$

назначается уступка $\delta^2>0$ и формируется множество M^2:

$$M^2 = \{\alpha \in M^1 | \ I^2(\alpha) \le \bar{I}^2 + \delta^2\}.$$

На последней итерации этой вычислительной процедуры решается задача оптимизации:

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha \in M^{P-1}} I^P(\alpha).$$

Если на некоторой j-ой операции множество M^j окажется недостаточно представительным, для последующей оптимизации следует попытаться скорректировать (увеличить) одну из уступок $\delta^1, \ldots, \delta^{j-1}$ или последовательно несколько из них.

Таким образом, применение метода уступок позволяет обеспечить последовательную минимизацию каждой из Р функций потерь на сформированном множестве допустимых оценок параметров. Это позволяет в определенной мере отразить в итоговой оценке α^* привлекательные свойства всех Р используемых методов идентификации.

Последовательное применение методов наименьших модулей и антиробастного оценивания при построении линейной регрессии

Пусть функция F линейна, l=m, и модель (1) поэтому приобретает форму:

$$y_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ki} + \varepsilon_k, \ k = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Пусть также при построении модели (3) исследователь намерен последовательно применить МНМ и МАО, т.е. Р=2, $I^1(\alpha)= J_1(\alpha)$, $I^2(\alpha)= J_\infty(\alpha)$, $I^1(\alpha) \succcurlyeq I^2(\alpha)$. В этом случае реализация описанного выше метода уступок сводится к решению двух задач линейного программирования (ЛП).

Действительно, в соответствии с [16, 22] имеем:

$$\bar{I}^1 = \min_{(\alpha,u,v)\in H} \sum_{k=1}^n (u_k + v_k), \qquad (4)$$

где

$$H = \{(\alpha, u, v) \mid \textstyle\sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ki} + u_k - v_k = y_k, \ k = \overline{1,n}, \ u_k \ge 0, \ v_k \ge 0, \ k = \overline{1,n}\}.$$

После назначения уступки $\delta^1>0$ окончательным решением задачи оценивания параметров регрессионной модели (3) будет вектор α^*:

$$\alpha^* = \arg \min_{(\alpha,u,v,r)\in M^1} \left(r + d\sum_{k=1}^n (u_k + v_k)\right), \qquad (5)$$

где

$$M^1 = \{(\alpha, u, v, r) \mid \textstyle\sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ki} + u_k - v_k = y_k, \ k = \overline{1,n}, \ u_k + v_k \le r, \ k = \overline{1,n},$$
$$\textstyle\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) \le \bar{I}^1 + \delta^1, u_k \ge 0, \quad v_k \ge 0, \ k = \overline{1,n}\},$$

d – малая положительная константа. Присутствие в целевой функции последней задачи второго слагаемого обеспечивает выполнение необходимого при сведении МНМ и МАО к задачам ЛП условия $u_k v_k=0$, $k = \overline{1,n}$.

Построение линейной регрессионной модели развития химической промышленности Российской Федерации

Применим описанный выше способ последовательного применения методов оценивания параметров при построении линейной регрессионной модели развития химической промышленности Российской Федерации. Введем следующие обозначения:

y - объем отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по видам экономической деятельности для химической промышленности, млн. руб.;

x - инвестиции в основной капитал по видам экономической деятельности для химической промышленности, млрд. руб.

В качестве информационной базы моделирования используем официальную статистику по выделенным показателям за 2003 – 2022 гг. [23-28] (табл. 1).

Таблица 1 – Статистические значения выделенных показателей

Table 1 – Statistical values of the selected indicators

Год	y	x
2003	453565	29.8
2004	571186	37
2005	672332	56.8
2006	764300	78.4
2007	944965	105.9
2008	1312181	135.6
2009	1061672	110.1
2010	1427273	112.9
2011	1812752	162.6
2012	1941784	212.3
2013	1886216	224.9
2014	2102321	261.5
2015	2766834	362.8
2016	2770635	367.8
2017	2742593	424.8
2018	3265833	484.6
2019	3280446	472.2
2020	3535705	480.6
2021	5263682	550.5
2022	5962482	731.3

Будем строить линейную модель:

$$y_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \varepsilon_k,\ k = \overline{1,20}. \qquad (6)$$

Вначале сделаем это с помощью наиболее популярного в регрессионном анализе МНК:

$$y_k = 260135 + 7281.22 x_k + \varepsilon_k,\ k = \overline{1,20}, \qquad (7)$$

R = 0.943, F = 313.7, E = 9.2, $\sum_{k=1}^{20} |\varepsilon_k|$=4657623.35, $\max\limits_{k=1,20} |\varepsilon_k|$ = 995236.17.

Здесь R и F – критерии множественной детерминации и Фишера, E – средняя относительная ошибка аппроксимации. Значения критериев адекватности модели (7) указывают на ее высокое качество.

Построим модель (6) с помощью МНМ, решив задачу ЛП (4):

$$y_k = 318742 + 6747.77\, x_k + \varepsilon_k,\ k = \overline{1,20}, \qquad (8)$$

E = 8.7, $\sum_{k=1}^{20} |\varepsilon_k|$=4337367, $\max\limits_{k=1,20} |\varepsilon_k|$ = 1230291.2.

Применение метода антиробастного оценивания приводит к модели:

$$y_k = -272567.6 + 8766.93\, x_k + \varepsilon_k,\ k = \overline{1,20}, \qquad (9)$$

E = 9.8, $\sum_{k=1}^{20} |\varepsilon_k|$ =8446949.4, $\max\limits_{k=1,20} |\varepsilon_k|$ = 710054.

Наконец, применим метод уступок, назначив величину δ^1=43373.67 (1% от $\sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_k|$=4337367) и решив задачу ЛП (5):

$$y_k = 302879.4 + 6882.21\, x_k + \varepsilon_k,\ k = \overline{1,20}, \qquad (10)$$

E=8.9, $\sum_{k=1}^{20} |\varepsilon_k|$=4380740.7, $\max\limits_{k=1,20} |\varepsilon_k|$= 1172685.6.

Таким образом, все построенные варианты (7) – (10) модели (6) обладают весьма приемлемыми аппроксимационными качествами и могут использоваться на практике. При этом вариант (10) является результатом последовательного применения МНМ и МАО путем реализации метода уступок и является своего рода компромиссом между ними.

Заметим, что метод уступок ранее применялся также при разработке способа разрешения альтернативности в оценках параметров регрессионных моделей [29].

Заключение

В работе предложен алгоритмический способ последовательного использования нескольких методов идентификации неизвестных параметров в общем случае нелинейной регрессионной модели, основанный на применении известного в теории решения многокритериальных задач метода уступок. Основной предпосылкой его привлечения является возможность упорядочения методов идентификации по предпочтительности. Этот способ предполагает решение серии оптимизационных задач. При использовании методов наименьших модулей и антиробастного оценивания их последовательное применение приводит к необходимости решения двух задач линейного программирования. Построены четыре варианта линейной регрессионной модели развития химической промышленности Российской Федерации.

Литература

1. V. Dorugade, D.N. Kashid. *Applied Mathematical Sciences*, **4**, 9, 447–456 (2010).
2. O.G. Alma. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **6**, 9, 409-421 (2011).
3. A.F. Lukman, K. Ayinde, S.S. Kun, E.T. Adewuyi. *Modelling and Simulation in Engineering*, **2019**, 1, DOI: 10.1155/2019/6342702.
4. H. Liang, H. Wu. *Journal of the American Statistical Association*, **103**, 48, 1570-1583 (2008), DOI: 10.1198/016214508000000797.
5. J. DiNardo, J.L. Tobias. *Journal of Economic Perspectives*, **15**, 4, 11–28 (2001), DOI: 10.1257/jep.15.4.11.
6. S. Nkurunziza, S.E. Ahmed. *Statistica Neerlandica*, **65**, 4, 387-406 (2011), DOI: 10.1111/j.1467-9574.2011.00491.x.
7. M. Spiess, A. Hamerle. *Computational Statistics & Data Analysis*, **33**, 4, 439-455 (2000), DOI: 10.1016/S0167-9473(99)00065-1.
8. B.U. Park, E. Mammen, Y.K. Lee, E.R. Lee. *International Statistical Review*, **83**, 1, 36-64 (2015), DOI: 10.1111/insr.12029.
9. Е.Н. Платонов, К.В. Семенихин. *Автоматика и телемеханика*, 5, 82-108 (2016).
10. В.И. Денисов, Д.В. Лисицин. *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **5**, 3, 92-102 (2002).
11. Р.Ф. Энгл, К.У.Д. Грэнджер. *Прикладная эконометрика*, **2015**, 3, 106-135 (2015).
12. В.Л. Горохов, Ю.В. Барышев, P. Teerikorpi, В.В. Витковский, С.И. Широков. *Мягкие измерения и вычисления*, **38**, 1, 28-59 (2021).
13. А.Г. Подвесовский, Р.А. Исаев. *International Journal of Open Information Technologies*, **7**, 6. 35-61 (2019), DOI: 10.26583/sv.12.4.01.
14. Ю.Ю. Линке. *Теория вероятностей и ее применения*, **62**, 3, 468-498 (2017), DOI: 10.4213/tvp5122.
15. С.И. Носков. *Вестник Воронежского государственного университета*, **2**, 153-160 (2021), DOI: 10.17308/sait.2021.2/3511.

16. С.И. Носков. *Математическое моделирование*, **32**, 11, 70–78 (2020), DOI: 10.20948/mm-2020-11-06.
17. С.И. Носков, Е.С. Попов. *Вестник Технологического университета*. **27**, 3, 101-104 (2024).
18. С.И. Носков. *Вестник Технологического университета*, **25**, 10, 92-94 (2022).
19. Е.З. Демиденко. *Линейная и нелинейная регрессии*, Финансы и статистика, Москва, 1981. 302 с.
20. А.В. Баенхаева, М.П. Базилевский, С.И. Носков. *Фундаментальные исследования*, **2016**, 10, 9-14 (2016).
21. Я.Н. Ройтенберг. *Автоматическое управление*, Наука, Москва, 1978. 552 с.
22. С.И. Носков. *Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных*, Облинформпечать, Иркутск, 1996. 320 с.
23. *Промышленность России. 2005: Стат. сб.*, Росстат, Москва, 2006. 460 с.
24. *Промышленность России. 2010: Стат. сб.*, Росстат, Москва, 2010. 453 с.
25. *Промышленное производство в России. 2016: Стат. сб.*, Росстат, Москва, 2016. 347 с.
26. *Промышленное производство в России. 2019: Стат. сб.*, Росстат, Москва, 2019. 286 с.
27. *Промышленное производство в России. 2023: Стат. сб.*, Росстат, Москва, 2023. 259 с.
28. Промышленное производство [Электронный ресурс], URL: https://rosstat.gov.ru/enterprise_industrial (дата обращения 15.09.2024).
29. С.И. Носков. *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*, **4**, 154-162 (2023), DOI: 10.21685/2227-8486-2023-4-10.

References

1. V. Dorugade, D.N. Kashid. Applied Mathematical Sciences, 4, 9, 447–456 (2010).
2. O.G. Alma. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6, 9, 409-421 (2011).
3. A.F. Lukman, K. Ayinde, S.S. Kuhn, E.T. Adewuyi. Modeling and Simulation in Engineering, 2019, 1, DOI: 10.1155/2019/6342702.
4. H. Liang, H. Wu. Journal of the American Statistical Association, 103, 48, 1570-1583 (2008), DOI: 10.1198/016214508000000797.
5. J. DiNardo, J.L. Tobias. Journal of Economic Perspectives, 15, 4, 11–28 (2001), DOI: 10.1257/jep.15.4.11.
6. S. Nkurunziza, S.E. Ahmed. Statistica Neerlandica, 65, 4, 387-406 (2011), DOI: 10.1111/j.1467-9574.2011.00491.x.
7. M. Spiess, A. Hamerle. Computational Statistics & Data Analysis, 33, 4, 439-455 (2000), DOI: 10.1016/S0167-9473(99)00065-1.
8. B.U. Park, E. Mammen, Y.K. Lee, E.R. Lee. International Statistical Review, 83, 1, 36-64 (2015), DOI: 10.1111/insr.12029.
9. E.N. Platonov, K.V. Semenikhin. Automation and Telemechanics, 2016, 5, 82-108 (2016).
10. V.I. Denisov, D.V. Lisitsyn. Sib. J. Comput. Math., 5, 3, 92-102 (2002).
11. R.F. Engle, K.W.D. Granger. Applied Econometrics, 2015, 3, 106-135 (2015).
12. V.L. Gorokhov, Y.V. Baryshev, P. Teerikorpi, V.V. Vitkovsky, S.I. Shirokov. Soft Measurements and Computing, 38, 1, 28-59 (2021).
13. A.G. Podvesovsky, R.A. Isaev. International Journal of Open Information Technologies, 7, 6. 35-61 (2019), DOI: 10.26583/sv.12.4.01.
14. Y.Y. Linke. Probability Theory and Its Applications, 62, 3, 468-498 (2017), DOI: 10.4213/tvp5122.
15. S.I. Noskov. Bulletin of the Voronezh State University, 2021, 2, 153-160 (2021), DOI: 10.17308 /sait.2021.2/3511.
16. S.I. Noskov. Mathematical Modeling, 32, 11, 70–78 (2020), DOI: 10.20948/mm-2020-11-06.
17. S.I. Noskov, E.S. Popov. Bulletin of the Technological University. 27, 3, 101-104 (2024).
18. S.I. Noskov. Herald of Technological University, 25, 10, 92-94 (2022).
19. E.Z. Demidenko. Linear and nonlinear regressions, Finance and Statistics, Moscow, 1981. 302 p.
20. A.V. Baenkhaeva, M.P. Bazilevsky, S.I. Noskov. Fundamental Research, 2016, 10, 9-14 (2016).
21. Y.N. Roytenberg. Automatic Control, Nauka, Moscow, 1978. 552 p.
22. S.I. Noskov. Technology of modeling objects with unstable functioning and uncertainty in data, Oblinformpechat, Irkutsk, 1996. 320 p.
23. Industry of Russia. 2005: Stat.sb., Rosstat, Moscow, 2006. 460 p.
24. Industry of Russia. 2010: Stat.sb., Rosstat, Moscow, 2010. 453 p.
25. Industrial production in Russia. 2016: Stat.sb., Rosstat, Moscow, 2016. 347 p.
26. Industrial production in Russia. 2019: Stat.sb., Rosstat, Moscow, 2019. 286 p.
27. Industrial production in Russia. 2023: Stat.sb., Rosstat, Moscow , 2023. 259 p. 28. Industrial production [Electronic resource], URL: https://rosstat.gov.ru/enterprise_industrial (date of circulation 09.15.2024).
28. S.I. Noskov. Models, systems, networks in economics, technology, nature and society. 2023, 4, 154-162 (2023), DOI: 10.21685/2227-8486-2023-4-10.
29. S.I. Noskov. Models, systems, networks in economics, technology, nature and society. 2023, 4, 154-162 (2023), DOI: 10.21685/2227-8486-2023-4-10.

© **С. И. Носков** – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия, sergey.noskov.57@mail.ru; **С. В. Беляев** – магистрант кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, bsv2001@list.ru.

© **S. I. Noskov** – Doctor of Sciences (Technical Sci.), Professor, Department of Information Systems and Information Security, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia, sergey.noskov.57@mail.ru; **S. V. Belyaev** – Master-student of the department of Information Systems and Information Security, Irkutsk State Transport University, bsv2001@list.ru.