Вестник технологического университета. 2024. Т.27, №12

УДК 004.9 *DOI 10.55421/1998-7072_2024_27_12_165*

Н. К. Нуриев, Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповой входной поток, ограниченное время жизни заявки, математическая модель.

В статье представлены результаты математического моделирования систем массового обслуживания пуассоновского входного потока заявок с ограниченным временем жизни. Для систем без опции накопления очереди и одним каналом обслуживания получены формулы нахождения интенсивности выхода заявок из системы и стационарных состояний системы, которые позволяют определить долю двукомпонентных потерь – от отказа в обслуживании по приходу заявки вследствие занятости канала и не завершенного обслуживания вследствие окончания срока жизни заявки. Сделано обобщение для системы массового обслуживания простейшего потока заявок с ограниченным временем жизни на случай нескольких эквивалентных каналов обработки. Произведено сравнение результатов математического моделирования с результатами имитационных экспериментов в рамках модели, созданной авторами для широкого спектра систем обслуживания заявок с ограниченным временем жизни. Выполнена оценка достоверности результатов имитационного моделирования в настоящей постановке. Для систем с очередью подробно исследована модель, упомянутая в работах советских математиков Гнеденко и Коваленко. Показано, как и для чего вводятся дополнительные нестандартные функции распределения вероятностей некоторых случайных величин. Отражена невозможность отыскания вида этих функций в общем случае. Найден вид одной из них для частного случая, когда время пребывания в очереди для всех заявок не может превышать некоторую постоянную величину. С целью приблизиться к виду означенных функций по результатам работы имитационной модели построены гистограммы распределения. Сделан вывод о том, что для практического применения следует использовать аппарат имитационного моделирования.

N. K. Nuriev, N. K. Shaidullina, E. A. Pechenyy

MATHEMATICAL MODELING OF MASS SERVICE SYSTEMS FOR APPLICATIONS WITH LIMITED LIFETIME

Keywords: mass service system, group input stream, limited life of request, mathematical model.

The paper presents the results of mathematical modeling of Poisson input flow mass service systems with a limited lifetime. For systems without a queue accumulation option and one service channel, formulas are obtained for finding the intensity of exiting requests from the system and stationary states of the system, which make it possible to determine the proportion of two-component losses - from denial of service upon receipt of a request due to channel occupancy and incomplete service due to expiration of the life of the request. A generalization is made for a system of mass service of the simplest flow of applications with a limited life time in case of several equivalent processing channels. The results of mathematical modeling were compared with the results of simulation experiments within the framework of the model created by the authors for a wide range of application service systems with a limited lifetime. The reliability of the simulation results in this study was evaluated. For queued systems, the model mentioned in the works of Soviet mathematicians Gnedenko and Kovalenko was investigated in detail. It is shown how and for what additional non-standard functions of the probability distribution of some random variables are introduced. The impossibility of finding the type of these functions in the general case is reflected. The form of one of them is found for a special case, when the time spent in the queue for all requests cannot exceed a certain constant value. In order to approach the form of the above functions, distribution histograms are constructed based on the results of the simulation model. It is concluded that for practical application, the apparatus of simulation modeling should be used.

Введение

Теория систем массового обслуживания (СМО) родилась чуть более 100 лет назад. Основоположником её принято считать датского математика и инженера А.К. Эрланга, который впервые применил математическую статистику для описания телефонного трафика [1]. В настоящее время теория массового обслуживания занимается исследованием стохастических процессов в дискретных системах [2]. Основными элементами любой СМО являются заявки, поступающие в случайные моменты времени, накопитель (очередь), в котором заявки ожидают обслуживания, каналы – обслуживающие устройства. В виду этого и классифицировать модели СМО принято по количеству классов заявок, поступающих в СМО, по числу мест в очереди, по количеству каналов [2]. Класс СМО обуславливает, в частности, оценки эффективности функционирования системы. Например, важнейшей характеристикой качества обслуживания системы с очередью является среднее время ожидания начала обслуживания, а системы с потерями – вероятность отказа в обслуживании или доля необслуженных заявок [3].

В данной работе рассмотрена система массового обслуживания простейшего входного потока заявок с ограниченным временем жизни. Подобные системы как никогда актуальны в настоящее время, поскольку самым востребованным и важным ресурсом сейчас является информация, актуальность которой конечна, а эффективность принимаемых решений напрямую зависит того, насколько быстро и качественно информация будет обработана [4]. Сфера применения таких моделей СМО не ограничивается только обработкой информации, они востребованы во многих производственных, научных и экономических задачах [3]. Например, ограниченное время жизни заявки может быть обусловлено сроком годности товара в области продаж, зоной действия канала обслуживания в технологических процессах, временем актуальности медицинских манипуляций [3, 5, 6, 7]. Изучением таких систем в той или иной мере занимались многие исследователи в разных постановках. В работе [8] изложен метод расчета моментов случайного времени пребывания заявок, полностью обработанных сетью массового обслуживания, при ограничении на полное время пребывания в ней. В работе [9] с помощью статистического моделирования показывается эффективность динамической сортировки потока заявок по сравнению с простейшими дисциплинами. В работе [10] получены основные характеристики одноканальной системы массового обслуживания простейшего потока заявок с ограниченным временем пребывания заявки в очереди неограниченной длины. В работе [11] предпринята попытка обобщить результаты работы [10] для многоканальной системы. Целью данной работы является математическое моделирование систем массового обслуживания простейшего потока заявок с ограниченным временем жизни с накопителем неограниченной емкости и без него.

Математическое моделирование

Рассмотрим простейшую СМО, в составе которой имеется единственный канал обслуживания, а опция накопления очереди отсутствует. Поток поступающих требований предполагается пуассоновским со средней интенсивностью λ. Поток обслуживания также будем считать простейшим с интенсивностью μ. Поведение таких систем досконально изучено. Известно, что переходные вероятности этих систем стремятся к стационарному состоянию по экспоненциальному закону. Финальные вероятности P_0^* и P_1^*, которые имеют смысл доли обслуженных и доли потерянных заявок соответственно, достигаются и равны

$$P_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{1}$$

Дополним эту классическую постановку задачи, добавив ограничение на время жизни заявок, равное фиксированной величине τ. Иначе говоря, если заявка, принятая в работу, не будет обслужена за время $t \le \tau$, то в момент времени τ она покидает систему и считается потерянной наряду с заявками, получившими отказ в момент поступления. В этом случае ситуация радикально меняется. Во-первых потому, что появляется новая компонента потерь в виде не полностью обслуженных заявок. Во-вторых, появляется необходимость введения дополнительной эксплуатационной характеристики – интенсивности выхода заявок из системы $\tilde{\mu}$. Для классических СМО с отказами в этом нет необходимости, поскольку при отсутствии ограничении времени жизни заявок интенсивность их выхода из системы $\tilde{\mu}$ тождественно равна интенсивности потока обслуживания μ. Если же продолжительность жизни ограничена τ, то все заявки, не обслуженные до его истечения, покидают систему, пробыв в ней одно и то же время, равное сроку жизни τ. Именно поэтому среднее (по всему ансамблю заявок, попавших на обслуживание) время пребывания при ограниченном времени жизни будет меньше, чем в классическом варианте. Следовательно, $\tilde{\mu} > \mu$.

С учетом изложенного, при ограничении времени жизни заявок вероятности стационарных состояний СМО $\widetilde{P_0}$ и $\widetilde{P_1}$ примут вид:

$$\widetilde{P_0} = \frac{\tilde{\mu}}{\lambda + \tilde{\mu}}, \widetilde{P_1} = \frac{\lambda}{\lambda + \tilde{\mu}}. \tag{2}$$

Рассмотрим порядок отыскания величины $\tilde{\mu}$.

Прежде всего заметим, что величина средней интенсивности обслуживания μ не зависит от привходящих обстоятельств, поскольку является характеристикой технических возможностей обслуживающего устройства. Поэтому, как видно из рисунка 1, доля заявок, обслуженных полностью (из тех, что попали в систему) равна

$$\alpha = \int_0^\tau \mu e^{-\mu t} dt, \tag{3}$$

а доля заявок, которые не получили обслуживание в полном объеме в связи с исчерпанием срока жизни, равна

$$1 - \alpha = 1 - \int_0^\tau \mu e^{-\mu t} dt = \int_\tau^\infty \mu e^{-\mu t} dt. \tag{4}$$

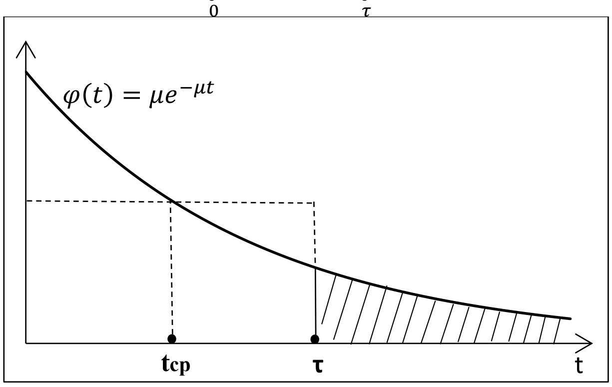

Рис. 1 – Доля заявок, не получивших обслуживание в полном объеме

Fig. 1 – Percentage of applications that did not receive full service

Используя известную теорему о среднем [12], найдем величину среднего времени пребывания в системе полностью обслуженных заявок:

$$\varphi(t_{\text{ср}}) = \frac{\alpha}{\tau}, \tag{5}$$

откуда, с учетом вида функции плотности вероятности потока обслуживания:

$$t_{\text{ср}} = -\frac{1}{\mu} ln \frac{\alpha}{\mu\tau} = \frac{1}{\mu} ln \frac{\mu\tau}{\alpha}. \tag{6}$$

И, поскольку, как было отмечено выше, время пребывания всех не полностью обслуженных заявок одинаково и равно времени их жизни τ, среднее время нахождения в системе всего множества заявок, попавших на обслуживание, равно

$$\bar{t} = \alpha t_{\text{ср}} + (1-\alpha)\tau = \frac{1}{\mu} ln\frac{\mu\tau}{\alpha} + (1-\alpha)\tau, \qquad (7)$$

а среднее значение интенсивности ухода заявок:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\bar{t}}. \qquad (8)$$

Для СМО с несколькими эквивалентными каналами без опции накопления очереди схема построения модели сохраняется, а величина интенсивности ухода заявок из системы также описывается соотношениями (6)-(8). В формулах Эрланга, применяемых для вычисления вероятности стационарного состояния, показатель интенсивности обслуживания μ (так же, как для одноканальной системы), заменяется на $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{P}_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\tilde{\gamma}^i}{i!}\right]^{-1}, \tilde{P}_i = \frac{\tilde{\gamma}^i}{i!}\tilde{P}_0, \tilde{\gamma} = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}, i = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

n – число каналов обслуживания.

Доля заявок, не попавших на обслуживание, численно равна вероятности отказа:

$$\tilde{P}_{\text{отк}} = \tilde{P}_{\text{отк}} = \frac{\tilde{\gamma}^n}{n!}\tilde{P}_0. \qquad (10)$$

Особенностью СМО с ограниченным временем жизни заявок, где допускается накопление очереди, является двухкомпонентность потерь. Истечение срока жизни заявки может наступить как во время ее нахождения в фазе обслуживания, так и тогда, когда она пребывает в очереди. Практическим следствие этого становится то, что, как показали советские математики Б.В. Гнеденко [13] и И.Н. Коваленко [14], сведений о функциях распределения входного потока требований и потока обслуживания оказывается недостаточно для построения математической модели. Результаты, полученные в их работах, основаны на глубоком анализе СМО, что обуславливает целесообразность их использования для математического моделирования. Используя эти результаты покажем, как может быть получена модель одноканальной СМО с ожиданием в условиях ограниченного времени жизни заявок.

Рассмотрим СМО, обладающую заявленными свойствами. Будем полагать, что входной поток требований имеет распределение Пуассона со средней интенсивностью λ. Это позволяет гарантировать независимость заявок в потоке, что в процессе моделирования весьма существенно. Функцию плотности вероятности потока обслуживания будем обозначать φ(t); случайную величину времени ожидания начала обслуживания заявки, поступившей в систему в момент времени t, обозначим w(t). Тогда величина

$$P(\omega, t) = P[w(t)] \qquad (11)$$

имеет смысл вероятности того, что время ожидания начала обслуживания заявки, пришедшей в систему в момент времени t, не превосходит величины ω.

Введем в рассмотрение еще две вероятностные характеристики: R(ω) – распределение вероятностей того, что срок пребывания заявки в очереди равен ω, $B_x(\omega)$ – распределение вероятностей того, что после ожидания в течение отрезка времени x, заявка попадет на обслуживание, где будет находится в течение ω-x. Сдвинем время поступления на величину Δt и выясним, что необходимо для выполнения условия $w(t+\Delta t) \leq \omega$ (предполагается, что величина ω для разных заявок может принимать различные значения). Реализация искомого условия достигается как результат осуществления одного из четырех несовместных событий:

1. $w(t) < \omega + \Delta t$ и в течение промежутка $(t + \Delta t)$ не приходит ни одна заявка.
2. За интервал времени $t + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \Delta t$, приходит одна заявка, которая через время $x < \omega + \Delta t$, не дождавшись обслуживания, уходит из системы.
3. За интервал времени $t + \varepsilon$ поступает одна заявка, которая после пребывания в очереди в течение времени x поступает на обслуживание, однако обслуживание не завершает и уходит из системы до момента $\omega - x + \Delta t$.
4. Ситуация аналогичная п.3, но пришедшая заявка обслуживается полностью, т.е. находится в фазе обслуживания дольше, чем $\omega - x + \Delta t$.

Вероятность реализации соотношения $w(t) + \Delta t \leq \omega$ по правилу сложения вероятностей определится как сумма вероятностей осуществления событий п.п.1-4.

$$\begin{gathered} P(\omega, t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P(\omega+\Delta t, t) + \\ \lambda\Delta t \int_0^{\omega+\Delta t} \{R(x) + [1-R(x)]B_x(\omega - x + \Delta t) + \\ +[1-R(x)][1-B_x(\omega - x + \Delta t)] * \\ * \varphi(\omega - x + \Delta t)\} dP(x,t) \end{gathered} \qquad (12)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (12) определяет вероятность события п.1 и непосредственно следует из свойств стационарности, ординарности и отсутствия последействия входного потока заявок, который, как отмечалось выше, предполагается пуассоновским. Слагаемые в подынтегральном выражении соответствуют вероятностям осуществления событий п.п.2-4. Это следует из определения, которые были даны специально введенным функциям распределения вероятностей R(ω) и $B_x(\omega)$. Заметим также, что только последнее из слагаемых в подынтегральном выражении умножается на функцию плотности вероятности потока обслуживания, поскольку только событие п.4 предполагает полное обслуживание заявки.

Разделим обе части уравнения (12) на Δt и, полагая $\Delta t \to 0$, перейдем к дифференциалам:

$$\begin{gathered} \frac{\partial P(\omega,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(\omega,t)}{\partial \omega} - \lambda P(\omega,t) + \\ \lambda \int_0^{\omega} \{R(x) + [1-R(x)]B_x(\omega - x) + \\ +[1-R(x)][1-B_x(\omega - x)] * \\ * \varphi(\omega - x)\} d_x P(x,t) \end{gathered} \qquad (13)$$

Для стационарного состояния при $t \to \infty$ уравнение существенно упрощается:

$$\frac{\partial P(\omega)}{\partial t} = \lambda \int_{0}^{\omega} [1 - R(x)][1 - B_x(\omega - x)] * \quad (14)$$
$$* [1 - \varphi(\omega - x)]dP(x)$$

Полученные результаты могут быть использованы для вычисления ряда важных эксплуатационных характеристик системы. Например, вероятности потери требований в очереди

$$\alpha = \int_{0}^{\infty} R(x)dP(x); \quad (15)$$

Вероятности потери требования вследствие его неполного обслуживания

$$\theta = \int_{0}^{\infty} [1 - R(x)] \int_{0}^{\infty} B_x(y)\, d\varphi(y) dP(x) \quad (16)$$

и т.д.

Очевидной проблемой представленной модели является ограниченность ее прикладной полезности, поскольку не ясно, какой вид имеют функции распределения вероятностей R(ω) и $B_x(\omega)$, и как может быть получено их аналитическое описание, что конечно, не умаляет ее содержательности.

Авторы, однако, заметили, что для одного частного случая вид функции R(ω) можно указать точно. Из базового определения этой функции ясно, что область ее действия ограничивается только заявками, находящимися в очереди. Поэтому, если время пребывания для всех заявок, поступивших в очередь, не может превышать некоторую постоянную величину T, то для заявок, у которых $\omega \le T$, вероятность не попадания на обслуживание равна 0, а для заявок, у которых $\omega > T$, вероятность ухода из очереди до начала обслуживания равна 1. Таким образом, в этом случае вид функции R(ω) вполне определен:

$$R(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ при } \omega \le T \\ 1 \text{ при } \omega > T \end{cases}. \quad (15)$$

Для СМО, где ограничено не время пребывания в очереди, а срок жизни заявок, практическая полезность этого результата не очень значительна. Для подобных СМО наиболее эффективным способом получения сведений прикладного характера, пригодных, например, при выполнении проектных работ, является аппарат имитационного моделирования.

Практические результаты

Приведем пример вычисления долей обслуженных и потерянных заявок с ограниченным временем жизни в одноканальной СМО с отказами.

Пусть λ = μ = τ =1. С использованием формул (3) – (8) получены следующие значения параметров: α = 0,632, $\varphi(t_{ср})$ = 0,632, $\bar{t}$ = 0,658, $\tilde{\mu}$ = 1,52, $\tilde{P}_0$ = 0,603, $\tilde{P}_1$ = 0,397.

Поскольку потерянные заявки имеют 2 компоненты – получившие отказ по приходу и не обслуженные полностью в процессе обработки вследствие окончания срока годности, то их доля будет вычислена так: 0,603*0,368 + 0,397 = 0,619. Следовательно, только 38,1% заявок, попавших в систему, будет обслужено полностью.

В работе [15] описана построенная и реализованная авторами имитационная модель системы массового обслуживания заявок с ограниченным временем жизни. С использованием этой модели проведены опыты с описанными выше входными параметрами для простейшего потока заявок. Результаты таковы: доля полностью обслуженных заявок равна 0,387, доля недообслуженных – 0,226, доля заявок, получивших отказ по приходу – 0,387. Относительная погрешность суммарной доли потерянных заявок составляет 1%.

Для входных параметров λ = 1/4, μ = 1/6, τ =6 аналитическая модель дает следующие результаты: α = 0,632, $\varphi(t_{ср})$ = 0,1053, $\bar{t}$ = 3,948, $\tilde{\mu}$ = 0,2533, $\tilde{P}_0$ = 0,4967, $\tilde{P}_1$ = 0,5033. Доля суммарных потерь: 0, 4967*0,368 + 0, 5033= 0,686. Результаты работы имитационной модели таковы: доля полностью обслуженных заявок равна 0,325, доля недообслуженных – 0,188, доля заявок, получивших отказ по приходу – 0,513. Относительная погрешность суммарной доли потерянных заявок составляет 1,5%.

Для СМО простейшего потока заявок с ограниченным временем жизни, подразумевающей накопление очереди, на основании результатов имитационных экспериментов были получены гистограммы распределения времени ожидания заявки в очереди, т.е. предпринята попытка опытным путем найти вид функции R(ω), описанной выше.

Для комбинации входных параметров λ = μ = τ =1 гистограмма изображена на рисунке 2, для комбинации λ = 1/4, μ = 1/6, τ =6 – на рисунке 3.

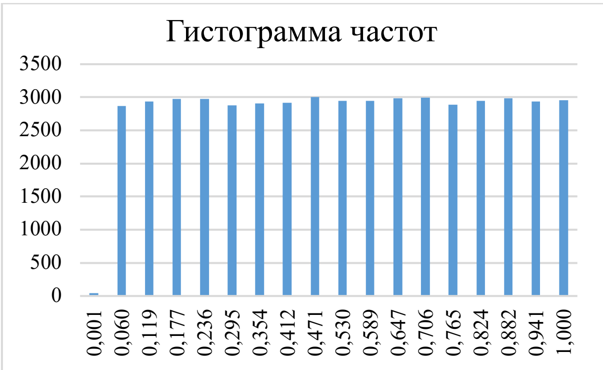

Рис. 2 –Распределение частот времени ожидания заявки в очереди для набора параметров 1

Fig. 2 – Distribution of frequencies of waiting time of the request in the queue for the set of parameters 1

Рис. 3 – Распределение частот времени ожидания заявки в очереди для набора параметров 2

Fig. 3 – Frequency distribution of waiting time of the application in the queue for the parameter set 2

Очевидно, что вид функции существенно зависит от набора входных параметров и не может быть оценен априори.

Заключение

В работе рассмотрено математическое моделирование систем массового обслуживания пуассоновского входного потока заявок с ограниченным временем жизни.

Для систем без очереди построена математическая модель, которая позволяет отыскивать вероятности стационарных состояний системы и долей заявок, получивших отказ в момент поступления, заявок, получивших отказ в процессе обработки вследствие окончания срока жизни, и заявок, обслуженных полностью. Для произвольного набора параметров произведено сравнение результатов аналитической модели и численных результатов работы имитационной модели, описанной авторами в работе [15]. Относительная погрешность суммарных потерь составляет в среднем 2,5%, что является вполне удовлетворительным совпадением результатов имитационного моделирования с аналитической моделью.

Для одноканальной СМО с ожиданием приведена модель, основанная на результатах работ [13, 14]. Показано, что для простейшего варианта с пуассоновским входным потоком заявок и одним каналом обслуживания практическая полезность модели ограничена ввиду невозможности отыскания вида функций распределения вероятностей. На основании результатов имитационных экспериментов с определенным набором параметров построены гистограммы распределения, которые дают возможность выдвинуть предположение о виде функций, но не позволяют дать универсальные рекомендации относительно аналитического вида этих функций. Поскольку вышеописанные неопределенности возникают уже при моделировании одноканальной системы обслуживания простейшего потока заявок с ограниченным временем жизни, то единственным инструментом для выявления функциональных характеристик систем более широкого формата является имитационное моделирование.

Литература

1. А.Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963. – С.7-148.
2. Т.И. Алиев, Основы моделирования дискретных систем. СПбГУ ИТМО, СПб, 2009, 363 с.
3. Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания. Наука, Москва, 1966, 432 с.
4. В.М. Постников, С.Б. Спиридонов, В.И Терехов. Методы и модели массового обслуживания в системах организационного управления. Спутник+, Москва, 2023, 261 с.
5. Н.К. Шайдуллина, Вестник технологического университета, 25, 12, 158-161 (2022).
6. Н.К. Шайдуллина, Е.А. Печеный, Н.К. Нуриев, Современные наукоемкие технологии, 7, 69-73 (2022).
7. А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, Л.Р. Валеева, ФӘн-наука, 6(45), 5-9 (2015).
8. Ю.И. Рыжиков, А.В. Уланов, В сб. XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, 2014., С.8620-8624.
9. М. В. Бурлаков, Е. Е. Подоляк, Е. И. Шаповал. Автоматика и телемеханика, 10, 39-43 (1985).
10. М.И. Бусарев, А.П. Кирпичников, Д.Б. Флакс, Вестник Казан. технол. ун-та, 5, 22, С. 155-161 (2011).
11. А.П. Кирпичников, М.Н. Томилова, Вестник Казан. технол. ун-та, 22, 1, 92-96 (2019).
12. Г.М. Фихтенгольц, Основы математического анализа. Лань, СПб, 2015, 448 с.
13. Б.В. Гнеденко, Mathematik Technik Wirtschaft, 3, 160-166 (1960).
14. И.Н. Коваленко, теория вероятностей и ее применение, 6, 2, 222-228 (1961).
15. Н.К. Шайдуллина, Е.А. Печеный, Н.К. Нуриев, Современные наукоемкие технологии, 10, 94-99 (2024).

References

1. A.Y. Khinchin, Mathematical Methods of Mass Service Theory. State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, Moscow, 1963. - P.7-148.
2. T.I. Aliev, Fundamentals of Modelling of Discrete Systems. SPbSU ITMO, SPb, 2009, 363 p.
3. B.V. Gnedenko, I.N. Kovalenko, Introduction to the theory of mass service. Nauka, Moscow, 1966, 432 p.
4. V.M. Postnikov, S.B. Spiridonov, V.I. Terekhov. Methods and models of mass service in organisational management systems. Sputnik+, Moscow, 2023, 261 p.
5. N.K. Shaidullina, Herald of Technological University, 25, 12, 158-161 (2022).
6. N.K. Shaidullina, E.A. Pecheny, N.K. Nuriev, Sovremennye naukoyemkie tekhnologii, 7, 69-73 (2022).
7. A.P. Kirpichnikov, D.B. Flax, L.R. Valeeva, FӘn-nauka, 6(45), 5-9 (2015).
8. Y.I. Ryzhikov, A.V. Ulanov, In Proceedings of the XII All-Russian Meeting on Management Problems. Moscow, 2014., P.8620-8624.
9. M.V. Burlakov, E.E. Podolyak, E.I. Shapoval. Automatics and Telemechanics, 10, 39-43 (1985).
10. M.I. Busarev, A.P. Kirpichnikov, D.B. Flax, Herald of Technological University, 5, 22, P. 155-161 (2011).
11. A.P. Kirpichnikov, M.N. Tomilova, Herald of Technological University, 22, 1, 92-96 (2019).
12. G.M. Fikhtenholtz, Fundamentals of mathematical analysis. Lan, SPb, 2015, 448 p.
13. B.V. Gnedenko, Mathematik Technik Wirtschaft, 3, 160-166 (1960).
14. I.N. Kovalenko, Probability theory and its applications, 6, 2, 222-228 (1961).
15. N.K. Shaidullina, E.A. Pechyonyi, and N.K. Nuriev, Sovremennye Naukoyemkie Tekhnologii, 10, 94-99 (2024).

© **Н. К. Нуриев** – кандидат технических наук, доктор педагогических наук, профессор, кафедра Информатики и Прикладной Математики (ИПМ), Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), Казань, Россия, nurievnk@mail.ru, **Н. К. Шайдуллина** – старший преподаватель кафедры ИПМ, КНИТУ, nshaydullina@yandex.ru, **Е. А. Печеный** – кандидат технических наук, доцент, кафедра ИПМ, КНИТУ, platova51@mail.ru.

© **N. K. Nuriev** – PhD (Technical Sci.), Doctor of Sciences (Pedagogical Sci.), Professor, Department of Informatics and Applied Mathematics (IAM), Kazan National Research Technological University (KNRTU), Kazan, Russia, nurievnk@mail.ru, **N. K. Shaidullina** – Senior Lecturer, the IAM department, KNRTU, nshaydullina@yandex.ru, **E. A. Pechenyy** – PhD (Technical Sci.), Associate Professor, the IAM department, KNRTU, platova51@mail.ru