

Д. Д. Закиев, Н. А. Крутских, С. Я. Алибеков,
Н. Д. Закиев, А. В. Маряшев, Н. А. Кузина

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

Ключевые слова: автоматизация, манипулятор, обратная задача кинематики, параметризованная модель, трехмерная система координат, vb.net.

В статье рассмотрено решение обратной задачи кинематики в трехмерном пространстве на примере параметризованной виртуальной модели четырехзвеного манипулятора с детерминированным углом положения выходного звена манипулятора к горизонтальной поверхности воздействия с практикой реализации предложенного решения на языке программирования vb.net. Одним из преимуществ виртуальных технологий трехмерного проектирования является универсальность их прикладного аспекта использования, в частности в процессах исследования закономерностей и взаимосвязей механики движения в трехмерной системе координат с использованием встроенной системы параметризации, позволяющей менять внешние параметры механизма сохраняя внутренние связи. Использование виртуального инструментария позволяет еще на этапе проектирования определять закономерности движения, устанавливать взаимосвязи и выводить в том числе и математические зависимости исследуемых механических процессов. В частности, исследование механики движения промышленных манипуляторов в трехмерной виртуальной среде помимо наглядности исследуемого процесса, позволяет, меняя их геометрические параметры, взаимное расположение звеньев и межзвеновых углов с учетом закладываемых в конструкции степеней свободы, решать пространственные кинематические задачи, устанавливая зависимости на основе классического математического аппарата. Предлагаемое решение обратной задачи кинематики имеет прикладной аспект использования который заключается в реализации предлагаемого решения в управляющей программе на языке vb.net выполненной в том числе и в виде приложения производящего автоматизированный подсчет межзвеновых углов задействованных в исследуемом процессе парных звеньев манипулятора в зависимости от планируемых оператором (технологом) трехмерных координат последовательного положения выходного звена манипулятора в пространстве на основе выполняемого технологического процесса.

D. D. Zakiev, N. A. Krutskikh, S. Ya. Alibekov,
N. D. Zakiev, A. W. Maryashev, N. A. Kuzina

SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL INVERSE KINEMATICS PROBLEM OF A FOUR-LINK MANIPULATOR

Keywords: automation, manipulator, inverse kinematics problem, parameterized model, three-dimensional coordinate system, vb.net.

The article considers the solution of the inverse kinematics problem in three-dimensional space using the example of a parameterized virtual model of a four-link manipulator with a deterministic angle of position of the output link of the manipulator to the horizontal impact surface with the practice of implementing the proposed solution in a programming language vb.net. One of the advantages of virtual technologies of three-dimensional design is the versatility of their applied aspect of use, in particular in the processes of studying the patterns of interrelationships of motion mechanics in a three-dimensional coordinate system using a built-in parameterization system that allows changing the external parameters of the mechanism while maintaining internal connections. The use of virtual tools makes it possible to determine the patterns of motion at the design stage, establish relationships and deduce, among other things, mathematical dependencies of the studied processes of mechanics. In particular, the study of the mechanics of motion of industrial manipulators in a three-dimensional virtual environment, in addition to illustrating the process under study, allows, by changing their geometric parameters, the relative position of links and inter-link angles, taking into account the degrees of freedom inherent in the design, to solve spatial kinematic problems, establishing dependencies based on the classical mathematical apparatus. The proposed solution to the inverse kinematics problem has an applied aspect of use, which consists in implementing the proposed solution in a control program in the language vb.net performed, among other things, in the form of an application that performs an automated calculation of the inter-link angles of the paired links of the manipulator involved in the process under study, depending on the three-dimensional coordinates of the sequential position of the output link of the manipulator in space planned by the operator or technologist on the basis of the performed the technological process.

Введение

Робототехника становится неотъемлемой частью производственной и исследовательской деятельности человека в самых различных областях [1-4].

Промышленные роботы обычно являются одним из компонентов автоматизированных

производственных систем, применяемых в гибком автоматизированном производстве [5].

Использование промышленных роботов позволяет в сочетании с автоматизированным технологическим оборудованием создавать безлюдные технологии [6].

Разработка систем управления многозвеновыми роботами-манипуляторами является одним из

важных аспектов современной теории автоматического управления [7].

Манипуляционные системы роботов представляют собой многосвязные исполнительные механизмы, оснащенные комплексом приводов, средствами очувствления и управления [8].

В практике использования промышленных манипуляторов подвод инструмента в рабочую зону и дальнейшую его ориентацию необходимо осуществлять под заданным относительным углом к поверхности воздействия (обработки). Например в процессе лазерного раскроя листового материала и гравировке, когда процесс резания лазерным лучом происходит под прямым углом к поверхности, при сварке ступенчатых и/или фасонных поверхностей, когда необходима ориентация электрода относительно шва, при нанесении различного рода покрытий, когда относительный угол краскопульта влияет на качество покрытия, в операциях транспортировки, складирования и упаковки и т.д. необходима строгая начальная и/или последующая ориентация выходного звена манипулятора (ВЗМ) в пространстве относительно поверхности воздействия.

В настоящее время существуют разнообразные специализированные средства, среды разработки и компьютерного моделирования, прикладные пакеты, библиотеки и т.д., которые могут использоваться при изучении динамики робототехнических систем [9-13].

Целью работы является совершенствование методов решения ОЗК в трехмерном пространстве с учетом управления углом положения ВЗМ к горизонтальной поверхности воздействия с

использованием средств автоматизированного проектирования и программирования.

Решение

Под ВЗМ мы условимся понимать совокупность ВЗМ и закрепленного на нем инструмента с концевой точкой (5), совпадающей с задаваемыми изначально координатами (C_x , C_y , C_z – Рис. 1).

Исследование процессов пространственного перемещения ВЗМ будем осуществлять на примере параметризированной четырехзвенной 3D модели манипулятора (Рис.1). Точки 1, 2, 3, 4, 5 являются концевыми точками сочленения звеньев манипулятора с одной степенью свободы, обладающие подвижностью в виде вращения. В точке 1 манипулятор вращается в горизонтальной плоскости XOY . В точках 2, 3, 4 вращение осуществляется в вертикальных плоскостях XOZ/YOZ . Точка 5, с проекциями на координатные оси C_x , C_y , C_z , является целевой концевой точкой расчета ВЗМ, обычно совпадающая выходной частью рабочего инструмента (сварочный резак, краскопульт, сопло лазера и т.д.). L_{12} , L_{23} , L_{34} , L_{45} длины звеньев. a_1 – угол образующийся между осью X и звеньями манипулятора на плоскости XOY . a_2 , a_3 , a_4 – искомые межзвенные углы в вертикальных плоскостях.

Вспомогательные вертикальные углы обозначены буквой b . d_{15} , d_{16} , d_{24} , d_{25} – вспомогательные отрезки между соответствующими цифровому индексу точками.

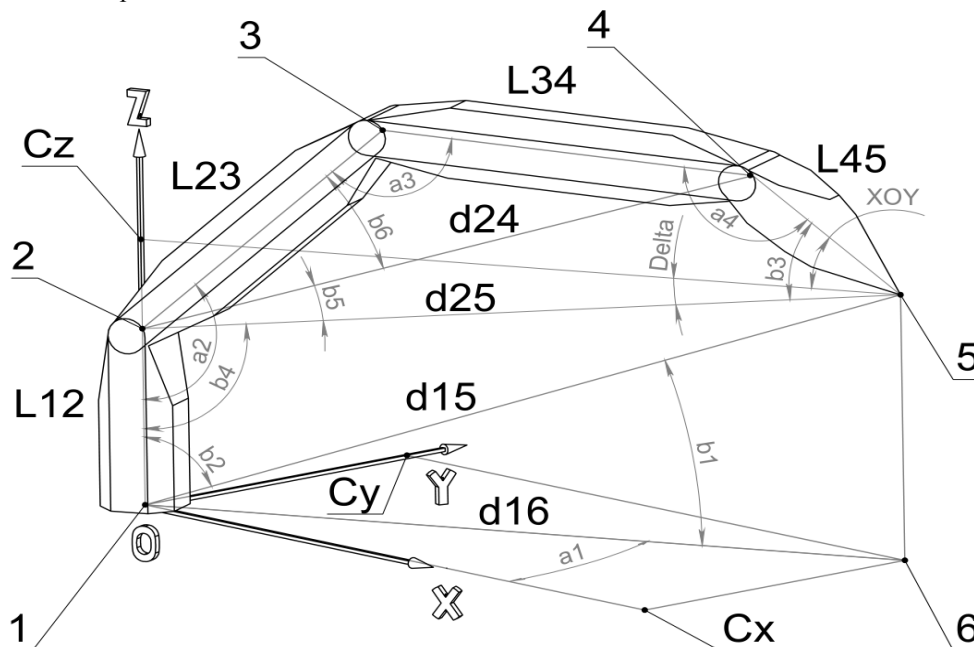


Рис. 1 - Расчетная схема параметризированной 3D модели манипулятора.

Fig. 1 - Calculation scheme of the parameterized 3D model of the manipulator.

Расчеты будем осуществлять без учета сил трения, массово-инерционных, упруго-деформационных характеристик и т.д., сводя их к пространственному кинематическому анализу методом ОЗК. Наиболее распространенной и важной

является обратная задача кинематики [5]. Решение ОЗК сводится к нахождению параметров манипуляционного механизма для достижения им заданного положения в пространстве [1].

Для решения ОЗК имеем исходные данные в виде длин звеньев – $L12, L23, L34, L45$ и конечных координат ВЗМ – C_x, C_y, C_z .

Рассчитаем длину прямой $d15$ [14-16]:

$$d15 = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

Прямую $d16$, лежащую на плоскости XOY можно вычислить как:

$$d16 = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

Откуда угол $b1$:

$$b1 = \arccos(d16/d15)$$

Тогда $b2$:

$$b2 = 90 - b1$$

Рассмотрим угол $b3$ образованный сходящимися прямыми $d25$ и $L45$ в точке 5. Для дальнейших расчетов преобразуем угол $b3$ через угол «Delta» введя значение угла XOY как угла наклона ВЗМ к плоскости XOY. Тогда:

$$b3 = XOY \pm Delta$$

Знак « $\pm$ » в уравнении нахождения угла $b3$ зависит от соотношения величин C_z и $L12$. Если $C_z > L12$, то ставится знак «+», если $C_z < L12$, «-». При $C_z = L12$, $Delta = 0$.

$$Delta = \arccos \frac{d16}{d25}$$

Используя теорему косинусов, найдем остальные параметры манипулятора:

$$d25 = \sqrt{(L12)^2 + (d15)^2 - 2 * L12 * d15 * \cos(b2)}$$

$$d24 = \sqrt{(L45)^2 + (d25)^2 - 2 * L45 * d25 * \cos(b3)}$$

$$b4 = \arccos \frac{(L12)^2 + (d25)^2 - (d15)^2}{2 * L12 * d25}$$

$$b5 = \arccos \frac{(d24)^2 + (d25)^2 - (L45)^2}{2 * d24 * d25}$$

$$b6 = \arccos \frac{(L23)^2 + (d24)^2 - (L34)^2}{2 * L23 * d24}$$

Окончательно получаем:

$$a1 = \arccos \frac{C_x}{d16}$$

$$a2 = b4 + b5 + b6$$

$$a3 = \arccos \frac{(L23)^2 + (L34)^2 - (d24)^2}{2 * L23 * L34}$$

$$a4 = 360 - (b3 + a3 + b5 + b6)$$

Исходные значения		Расчетные значения	
Координаты, мм	Длина звена, мм	Угол, град	
Cx 141	L12 50	a1	45
Cy 141	L23 90	a2	145,093352
Cz 102	L34 100	a3	119,819698
XOY 15	L45 50	a4	170,086949

```

d15 = ((Cx ^ 2) + (Cy ^ 2) + (Cz ^ 2)) ^ 0.5
d16 = ((Cx ^ 2) + (Cy ^ 2)) ^ 0.5
b1 = Acos(d16 / d15) * (180 / PI)
b2 = 90 - b1
d25 = Sqrt((L12 ^ 2) + (d15 ^ 2) - (2 * L12 * d15 * (Cos(b2 * PI / 180))))
Delta = Acos(d16 / d25) * (180 / PI)
XOY = CDBl(TextBox12.Text)
b3 = XOY + Delta
d24 = Sqrt((L45 ^ 2) + (d25 ^ 2) - (2 * L45 * d25 * (Cos(b3 * PI / 180))))
b4 = Acos(((L12 ^ 2) + (d25) ^ 2 - (d15) ^ 2) / ((2 * L12 * d25))) * (180 / PI)
b5 = Acos(((d24 ^ 2) + (d25) ^ 2 - (L45) ^ 2) / ((2 * d24 * d25))) * (180 / PI)
b6 = Acos(((L23 ^ 2) + (d24) ^ 2 - (L34) ^ 2) / ((2 * L23 * d24))) * (180 / PI)
a1 = Acos(Cx / d16) * (180 / PI)
a2 = b4 + b5 + b6
a3 = Acos(((L23 ^ 2) + (L34 ^ 2) - (d24 ^ 2)) / ((2 * L23 * L34))) * (180 / PI)
a4 = 360 - (b3 + a3 + b5 + b6)

```

Рис. 2- Интерфейс приложения и код для расчета ОЗК

Fig. 2 - The application interface and the code for calculating the UGC

Автоматизацию расчета предложенного решения ОЗК осуществляем путем создания приложения Рис.2.

Подставляя полученные в приложении параметры углов ($a1, a2, a3, a4$) в параметризованную 3D

модель производим тестирование алгоритма сверяя получаемые в приложении расчетные координаты с координатами в модели с учетом угла ориентации ВЗМ к плоскости (XOY) (Рис.3).

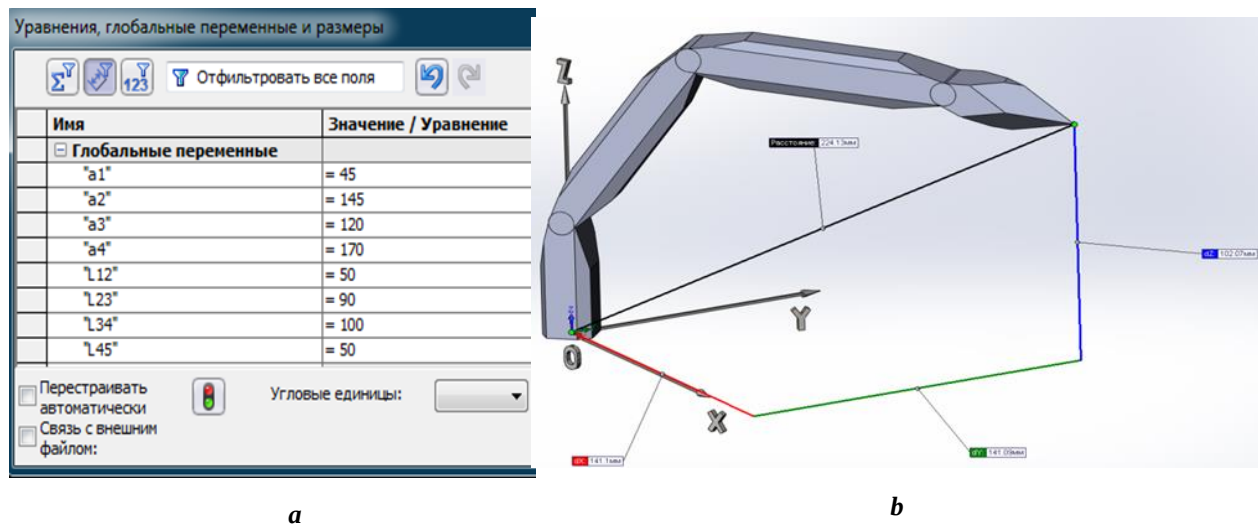


Рис. 3 - Параметризованная таблица (а) и процесс измерения координат в 3D модели (б)

Fig. 3 - Parameterized table (a) and the process of measuring coordinates in a 3D model (b)

Представленное решение не является единственным. Задачу можно решить, изначально задавая угол XOY направленный как по нормали к плоскости XOY , так и задавая его в определенном диапазоне.

Зададим изначально угол $XOY = 90^\circ$. Тогда:

$$d15 = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

$$d16 = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

$$d14 = \sqrt{d16^2 + (L45 + C_z)^2}$$

Определяя оставшиеся длины отрезков $d25$ и $d24$ весь дальнейший расчет сводится к различным вариациям теоремы косинусов.

Зададим изначально угол $XOY < 90^\circ$. Тогда определяя по известным формулам длины отрезков $d15$, $d16$ находим вспомогательные углы $b1$, $b2$, откуда, зная $d15$, $L12$ и $b2$ рассчитываем $d25$. Из известных значений сторон прямоугольного треугольника $d25$, $|C_z - L12|$, $d16$ (т.к. $d_{Cz5} = d16$) определяем угол $Delta$. Зная $d25$, $L45$ и угол $(XOY + Delta)$ находим $d24$. В продолжение расчета, также, по теореме косинусов, определяются остальные параметры манипулятора.

Задача может быть решена и определением изначальной относительной ориентацией звеньев в пространстве. Так, задавая положение звена $L34$ параллельно плоскости XOY и зная угол XOY , параметры звена $L23$ можно рассчитать из формулы:

$$\sqrt{C_x^2 + C_y^2} = L45 * \cos(XOY) + L34 + L23(|a2 - 90|)$$

Заключение

На основе предложенного метода создано программное приложение автоматизирующее процесс расчета углов относительного положения звеньев манипулятора методом ОЗК с учетом относительного угла положения ВЗМ к горизонтальной поверхности воздействия с возможностью наглядной визуализации процесса проверки полученных результатов на виртуальной

параметризованной модели в среде трехмерного проектирования. Предложено несколько вариантов решения ОЗК, что может быть использовано при расчете манипулятора как в условиях ограниченного пространства, так и при разработке средств параллельного контроля и точности исполнительных программ.

Литература

- 1.Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 480 с.
- 2.В.Г. Хомченко. Робототехнические системы: Учебное пособие. ОМСК 2016г. – 195 с.
- 3.Теоретические основы робототехники. В 2кн. /А.И. Корядяев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тыесес; отв.ред С.М. Каплунов; Ин-т Машиностроения им. Благодного РАН. – М.: Наука, 2006.
- 4.Тимофеев А.В. Управление роботами: Учеб.пособие – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1986. 240с.
- 5.Колтыгин Д.С., Седельников И.А. Метод и программа решения прямой и обратной задачи кинематики для управления роботом-манипулятором // Системы Методы Технологии. 2020. № 4 (48). С. 65–74.
- 6.Курышкин Н.П. Основы робототехники: учеб. пособие /КузГТУ. – Кемерово, 2012. – 168 с.
- 7.Захаров Д.Н., Куровский Д.М., Ракшин Е.А., Борисов О.И., Громов В.С., Колубин С.А. Моделирование и управление движением роботов. Учебно-методическое пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2023. – 84 с.
- 8.А.Г. Лесков, К.В. Бажинова, С.Д. Морозкин, Е.В. Феоктистова. Построение моделей кинематики исполнительных механизмов манипуляционных роботов с использованием блочных матриц.
- 9.Колубин С.А. Динамика робототехнических систем. Учебное пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 117 с.
- 10.Борисов И.И., Колубин С.А. Имитационное моделирование мехатронных систем – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 103 с.
- 11.Юревич Е.И. Основы робототехники / Учебное пособие. – СПб.: БХВ – Петербург, 2010. – 368 с.
- 12.Шахинпур М. Курс робототехники. М.: Мир, 1990. – 527 с.
- 13.W.Khalil and E.Dombre. Modeling, Identification and Control of Robots. Elsevier Science, 2004.

14. Высшая математика: Краткий справочник / Сост. Л.В. Васильева, В.В. Мухранова, О.А. Романчук – Хабаровск: Издательство Хабаровского государственного технического университета, 2000г. – 52 с.
15. Инженерная математика: Карманный справочник/Пер. с англ./ Джон Бёрд. – Москва: ДМК Пресс :Додэка-XXI, 2017 – 540 с.: ил.
16. Инженерная математика: учебное пособие / Н.В. Бурмашева, Е.Ю. Просвирыков, С.А. Берестова; Министерство науки и высшего образования РФ. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2022. – 84 с.

References

1. Zenkevich S.L., Yushchenko A.S. Basics of controlling manipulation robots. 2nd ed. M.: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2004. 480 p.
2. V.G. Khomchenko. Robotic systems: Textbook. OMSK 2016 – 195 p.
3. Theoretical foundations of robotics. In 2 books. /A.I. Koredyasev, B.L. Salamander, L.I. Tyves; responsible editor S.M. Kaplunov; Institute of Mechanical Engineering named after. Blagonravov RAS. – M.: Nauka, 2006.
4. Timofeev A.V. Robot control: Textbook - L.: Publishing house Leningrad. Univ., 1986. 240 p.
5. Kolygin D.S., Sedelnikov I.A. Method and program for solving direct and inverse kinematics problems for controlling a robotic manipulator // Systems Methods Technologies. 2020. No. 4 (48). pp. 65–74.
6. Kuryshkin N.P. Fundamentals of robotics: textbook. allowance /KuzGTU. – Kemerovo, 2012. – 168 p.

7. Zakharov D.N., Kurovsky D.M., Rakshin E.A., Borisov O.I., Gromov V.S., Kolyubin S.A. Modeling and control of robot motion. Educational and methodological manual. – St. Petersburg: ITMO University, 2023. – 84 p.
8. A.G. Leskov, K.V. Bazhinova, S.D. Moroshkin, E.V. Feoktistova. Construction of models of kinematics of actuators of manipulation robots using block matrices.
9. Kolyubin S.A. Dynamics of robotic systems. Tutorial. – St. Petersburg: ITMO University, 2017. – 117 p.
10. Borisov I.I., Kolyubin S.A. Simulation modeling of mechatronic systems - St. Petersburg: ITMO University, 2020. - 103 p.
11. Yurevich E.I. Fundamentals of Robotics / Textbook. – St. Petersburg: BHV – Petersburg, 2010. – 368 p.
12. Shahinpur M. Robotics course. M.: Mir, 1990. – 527 p.
13. W.Khalil and E.Dombre. Modeling, Identification and Control of Robots. Elsevier Science, 2004.
14. Higher mathematics: A short reference book / Comp. L.V. Vasilyeva, V.V. Mukhranova, O.A. Romanchuk - Khabarovsk: Publishing house of Khabarovsk State Technical University, 2000. – 52 p.
15. Engineering mathematics: Pocket reference book/Trans. from English / John Bird. – Moscow: DMK Press: Dodeka-XXI, 2017 – 540 p.: ill.
16. Engineering mathematics: textbook / N.V. Burmasheva, E.Yu. Prosviryakov, S.A. Berestova; Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. – Ekaterinburg: Ural Publishing House. Univ., 2022. – 84 p.

© **Д. Д. Закиев** – аспирант кафедры «Машиностроения и Материаловедения», Поволжский государственный технический университет (ПГТУ), Йошкар-Ола, Россия, flexibel@mail.ru; **Н. А. Крутских** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроения и Материаловедения», ПГТУ, lpkrut@mail.ru; **С.Я. Алибеков** – доктор технических наук, профессор, зав. кафедры «Машиностроения и Материаловедения», ПГТУ; **Н. Д. Закиев** – студент, Транспортный факультет, Московский политехнический университет, Москва, Россия, bubbblick@mail.ru; **А. В. Маряшев** – доцент кафедры ЭП, ПГТУ; **Н. А. Кузина** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Физики», Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия, KuzinaNA@corp.knrtu.ru.

© **D. D. Zakiev** – PhD-student of the Department of Mechanical Engineering and Materials Science (MEMS), Volga State Technical University (VSTU), Yoshkar-Ola, Russia, flexibel@mail.ru; **N.A. Krutskikh** – PhD (Technical Sci.), Associate Professor of the MEMS department, VSTU, lpkrut@mail.ru; **S. Ya. Alibekov** – Doctor of Sciences (Technical Sci.), Professor, Head of the MEMS department, VSTU, AlibekovSY@volgatech.net; **N. D. Zakiev** – Student, Faculty of Transport, Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia, bubbblick@mail.ru; **A. W. Maryashev** – Associate Professor of the Department of EP, VSTU; **N. A. Kuzina** – PhD (Pedagogical Sci.), Associate Professor of the Department of Physics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia, KuzinaNA@corp.knrtu.ru.

Все статьи номера поступили в редакцию журнала в период с 10.01.25 по 03.02.25.