Введение Статья, как и предыдущие статьи [1,2,3], посвящена теоретическому научно-исследовательскому направлению по реализации идеи о построении математической модели процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергетических затрат моделируемого процесса природы. В качестве демонстрационного объекта моделирования выбран достаточно хорошо изученный природный процесс «деформация-напряжение». В статье [2] представлены разновидности функционала Лагранжа, которые могут быть пригодны для моделирования процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергозатрат. 1. Функционал Лагранжа Рассмотрим процедуру постановки краевой задачи для поиска компонент моделируемого процесса с позиции одной из этих разновидностей – функционала Лагранжа в геометрически возможных перемещениях L[ǔ] (формула (8а) [2]): .(1.1) Этот функционал является объектом вариационного принципа Лагранжа, который позволяет подобрать лучшую аппроксимацию из имеющегося арсенала аппроксимации аргументов функционала Лагранжа [4]. Аргументами функционала (1.1) являются геометрически возможные перемещения ǔi: . (1.2) Здесь Su - кинематическая граница, где задаются кинематические связи, формирующие внешние перемещения uis(x), которые входят в состав граничных условий (1.2). На статической границе Sp задается внешняя поверхностная нагрузка pis(x). Для лучшей наглядности действий обратимся к одномерному пространству и рассмотрим простейший процесс «деформация-напряжение» на примере растягиваемого стержня (рис.1). Рис. 1 – Схема внешних воздействий Для рассматриваемой задачи функционал (1.1) и тождественно выполненные геометрические граничные условия (1.2) упростятся к виду: , (1.3) , (1.4) здесь L – длина стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, Us и Ps – внешние перемещения и внешняя растягивающая сила, заданные на кинематической границе (Su) x = 0 и статической границе (Sp) x = L соответственно. Для линейного процесса «напряжение-деформация», когда его компоненты линейно связаны друг с другом, деформация ε и удельная потенциальная энергия деформаций максимально упрощаются к виду соответственно: , (1.5) . (1.6) 2. Постановка вариационной задачи Выявим стационарные функции функционала (1.3) L[ǔ] при условии, что его аргументы предварительно удовлетворяют уравнению (1.4). Предварительное выполнение тождеств (1.4) означает, что задача ставится без каких-либо предварительных, дополнительных и прочих условий для аргументов ǔ(x) рассматриваемого функционала (1.3) L[ǔ]. Руководствуясь определением стационарных функций как функций, на которых первая вариация равна нулю [5], составим первую вариацию функционала L[ǔ] (1.3), выполним интегрирование по частям и получившийся результат приравняем нулю. Получим вариационное уравнение: , (2.1) из которого формируют систему уравнений Эйлера-Лагранжа для поиска стационарных функций функционала L[ǔ] (1.3). Варьируемые внутренние перемещения u(x) неизвестны как внутри области интегрирования 0≤x≤ L, так и на кинематической границе x = 0; поэтому вариации du принимаем: du(x) ¹ 0, 0 £ x £ L; du(x) ≡ 0, x = L. (2.2) Но на кинематической границе x =0 граничные условия для аргументов функционала (1.3) известны и тождественно выполнены по условию задачи. Поэтому вариацию du на этой границе отождествляем с нулем [6, стр.19]: du(x) ¹ 0, 0 £ x £ L; du(x) ≡ 0, x = 0. (2.3) Учитывая (2.2), (2.3), из уравнения (2.1) вытекают два уравнения в составе системы уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала L[ǔ] (1.3): внутри объема: ; (2.4а) на статической границе: . (2.4б) Уравнения (2.4а,б) системы совпадают с известными уравнениями равновесия в перемещениях внутри объема и на статической границе x = L. Обратим внимание на отсутствие требования равновесия на кинематической границе x = 0. Решая систему (2.4а,б), получим множество стационарных функций v(x) функционала L[ǔ] (1.3): , на которых, по определению стационарных функций [5], вариация этого функционала равна нулю: . Из множества стационарных функций v(x), различающихся на неопределенную константу C, выделим единственную: , (2.5) пользуясь свойством аргументов используемого функционала L[ǔ] (1.3) тождественно удовлетворять заданным граничным условиям(1.4): ; отсюда следует . Итак, получили решение поставленной в п. 2 задачи: стационарная функция, на которой первая вариация функционала равна нулю, представлена формулой (2.5). 3. Величина и характер стационарности Соответствующее стационарное значение StvΛ функционала L[ǔ] (1.3) получим, подставляя стационарную функцию v(x) [2.5] в функционал L[ǔ] (1.3): . (3.1) Выявим характер стационарности функционала L[ǔ], представляемого формулой (3.1). Для этого подставим стационарную функцию v(x) (2.5) функционала L[ǔ] (1.3) в его вторую вариацию: . Стационарная функция v(x) (2.5) является решением системы уравнений (2.4а,б), и потому обращает эту систему уравнений в систему тождеств: ; , учитывая которую, в представленной выше второй вариации половина членов обернутся тождественными нулями; в результате выражение второй вариации упростится к виду: . (3.2) Рассмотри знак получившегося выражения. На кинематической границе имеет место тождество (2.3): du(x) ≡ 0 при x = 0, которое распространим и на вторую вариацию: d2u º 0 при x = 0, что позволит удалить выражение на кинематической границе x = 0 из состава второй вариации (3.2): (3.3) Поскольку оставшийся интеграл всегда положителен, то всегда положительна вторая вариация (3.3) функционала L[ǔ] (1.3) на собственной стационарной функции этого функционала: , (3.4) Положительный знак второй вариации (3.4) указывает на выполнение достаточного условия выпуклости вниз функционала L[ǔ] (1.6), и потому на участке интегрирования 0 ≤ x ≤ L он имеет не более одного минимума [6, стр. 26]. Итак, если граничные условия для аргумента функционала Лагранжа заданы, то это значит, что объем, в котором протекает моделируемый процесс, зафиксирован внешними связями, которые формируют эти граничные условия. Множество аргументов функционала Лагранжа, тождественно удовлетворяющих заданным граничным условиям, позволяет найти такие функции, на которых энергетика процесса, моделируемого этим функционалом, может достигать минимума.