При исследовании малых, в том числе и упругопластических, деформаций обычно не принимают во внимание изменение размеров поперечного сечения, так как они очень малы и практически не влияют на результат. Примеры таких расчетов приведены в [1], [2]. В настоящей работе предпринята попытка расчета напряженно-деформированного состояния при чистом изгибе с учетом изменения размеров поперечного сечения. Защемленная одним концом консольная балка нагружена на свободном конце сосредоточенным моментом М. Поперечное сечение балки – прямоугольник , материал – сталь 20, диаграмма растяжения (рис 1) состоит их двух линейных участков: упругого, при: , и участка упрочнения, при , где e - относительная продольная деформация, индексы соответствуют пределам текучести и прочности. Характеристики материала: ГПа – модуль упругости, МПа и МПа – истинные пределы текучести и прочности, МПа - модуль упрочнения. Рис. 1 – Схема нагружения и диаграмма растяжения При расчете в упругой зоне поперечное сечение считается неизменным, изгибающий момент определяется как в работе [1], а в начале пластической зоны по упрощенной формуле , полученной с учетом малости отношений и . В этой формуле безразмерный модуль упрочнения, а безразмерный изгибающий момент, момент сопротивления сечения. Найдем выражение изгибающего момента в общем случае упругопластической деформации с учетом изменения размеров поперечного сечения. При этом, в связи с отсутствием диаграммы пластического сжатия, будем предполагать, что она центрально симметрична (относительно начала координат) диаграмме растяжения. Кроме того, учтем, что пластическое деформирование происходит без изменения объема, коэффициент Пуассона . Ясно также, что в растянутой части балки поперечные размеры уменьшаются, а в сжатой – в том же отношении увеличиваются. Как известно, изгибающий момент можно представить интегралом Здесь , звездочкой отмечены изменяющиеся размеры: . С учетом линейного изменения деформации по высоте – в соответствии с гипотезой плоских сечений – здесь деформация наиболее удаленного от нейтральной оси волокна, – эти выражения приводятся к виду: . Входящие в эти формулы дроби оставляем в прежнем виде, а интегрирование выполняем в старых пределах: от 0 до h/2, поэтому формулу изгибающего момента можно переписать так: После некоторых преобразований получим: (1) Далее задача решается численно, по алгоритму, описанному в работе [2]. Решение сводится к определению значения из уравнения (1) при заданном значении безразмерного момента m; уравнение решается методом Ньютона, после чего находится кривизна изогнутой оси балки: а затем определяются координаты точек изогнутой оси балки. Результаты расчета по программе «Big» на языке «Fortran-90» представлены графиком на рис. 2. Рис. 2 – Изогнутая ось балки при различных при в зависимости от : – конец кривой Каждая кривая - это изогнутая ось балки с относительной длиной при определенном значении безразмерного изгибающего момента. Вычисления показывают, что учет изменяемости сечения сильно изменяет результат. Так, если без учета изменяемости сечения угол поворота свободного концевого сечения при m = 1, 1,5, 1,75, 2,00, 2,1 составляет 0,05954, 0,2400, 1,9200, 3,8400, 4,6080, то при учете изменяемости сечения – значительно больше: 0,05954, 0,2400, 2,7343, 6,0368, 7,6067. Несущая способность балки тоже оказывается существенно меньше. Если предельным считать состояние, когда деформация наиболее растянутого волокна достигает значения , а напряжение - предела прочности, то идеальный расчет (неизменяемое сечение) показывает, что это происходит при , а реальный расчет приводит к результату , то есть меньше на 18%. По результатам расчетов построены также графики зависимости где угол поворота свободного концевого сечения балки, они приведены на рис. 3. Каждый график относится к определенному значению относительной длины: . Графики по форме напоминают диаграмму растяжения, заложенную в основу расчета. Каждый график приближенно можно изобразить ломаной, состоящей из двух линейных участков, описываемых уравнениями: - I участок , II участок - I участок , II участок - I участок , II участок Рис. 3 – Зависимости угла поворота от изгибающего момента Видно, что второй участок каждого графика является прямой, отсекающей на оси ординат один и тот же отрезок в точке (0, 1,48). Рассмотрим, как изменяется поперечное сечение балки. На рис. 4 показано измененное сечение, пусть верхняя часть балки при изгибе растягивается, а нижняя сжимается (в действительности наоборот). Предполагается, что в сжатой зоне изменения формы и размеров сечения прямо противоположны тем, что в растянутой. Ширина сечения изменяется линейно от значения вверху до значения внизу, высота растянутой и сжатой части сечения становится равной, соответственно, и . Расчет показывает, что в предельном состоянии (при ) верхняя часть сечения уменьшается на 9%, на столько же увеличивается сжимаемая нижняя часть. Рис. 4 – Сечение до и после деформирования Определим потенциальную энергию деформации. Найдем ее как работу внутренних сил. Приложенная к элементарной площадке элементарная сила на пути совершает работу: Подставив в это выражение формулы напряжения и деформации, найдем сначала потенциальную энергию, накопленную в элементе длины балки : где Интегрируя по длине, найдем потенциальную энергию, накопленную во всей балке: Здесь объем балки. Имея в виду, что запишем формулу потенциальной энергии в окончательном виде: Подсчитаем потенциальную энергию деформации нашей балки в предельном состоянии. Как уже было показано, в предельном состоянии максимальная деформация достигает предельного значения - а изгибающий момент – значения . Найдем значение функции деформации W: Тогда потенциальная энергия деформации При относительной длине балки потенциальная энергия составляет Если принять во внимание, что угол поворота концевого свободного сечения балки в предельном состоянии 3,8053, 7,6067 и 15,213 радиан, а произведение момента на угол поворота свободного конца балки в нашей задаче означает работу внешней силы (момента) на угловом перемещении, то работа постоянной внешней силы на перемещении равна Сравнивая значения потенциальной энергии деформации с работой внешней силы, убеждаемся в том, что отношение Действительно, Здесь обозначено: W – работа внешних сил на перемещениях их точек приложения при условии постоянства сил в процессе деформирования. Полученная закономерность подтверждается и графиками зависимости момента m от угла поворота (рис. 3). На рисунке один график – для случая - выделен штриховкой. Вся заштрихованная площадь – площадь прямоугольника – представляет собой работу W, площадь фигуры, заштрихованной вертикальными линиями, - потенциальную энергию деформации U, а площадь фигуры, заштрихованной горизонтальными линиями, – дополнительную работу Э, известно, что Сравнение соответствующих площадей графиков также приводит почти к тому же значению отношения 0,85. Поэтому можно считать, что при чистом упругопластическом изгибе потенциальная энергия деформации составляет 0,8, а дополнительная работа 0,2 от работы внешних сил, или В заключении сделаем одно важное замечание. Изменение поперечного сечения приводит к тому, что оно становится несимметричным относительно горизонтальной оси и нейтральная ось приходит в новое положение. В данной работе это не учтено, а просто сделано предположение, что общий изгибающий момент равен удвоенному моменту относительно старой нейтральной оси от напряжений в растянутой части сечения. Поэтому при больших деформациях возможна существенная ошибка, и этот вопрос требует дополнительного изучения