

Введение В теории управления динамикой систем, содержащей элементы различной физической природы, решаются задачи аналитического построения систем дифференциальных уравнений с требуемыми свойствами решений, заданными уравнениями связей. При численном решении систем дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей, возникает проблема стабилизации связей. В [1] приводится модификация уравнений динамики систем со связями, позволяющая решить эту задачу. В работе [2] вводятся в рассмотрение уравнения программных связей. В задачах моделирования кинематики и динамики механических систем получил широкое распространение предложенный Н. П. Еругиным [3] метод построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую на. В частности, в работе [4] рассмотрена задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегральные многообразия, методом, предложенным в [3], и определена конструкция систем дифференциальных уравнений из условия устойчивости этих многообразий. В работе [5] построена автономная система дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий на плоскости, определены коэффициенты, предусмотренные в конструкции системы, исходя из вида интегральных кривых и особых точек. В работе [6] предложена структура системы дифференциальных уравнений, позволяющая описать кинематические свойства системы уравнениями дифференциальных связей. Изложенные в [5, 6] методы построения динамических систем эффективно используется для программирования движения управляемых механических систем [7, 8]. В последнее время интенсивно развиваются методы автоматизации составления и решения уравнений движения. Удобные для автоматизации формы записи уравнений движения могут быть получены при использовании методов и принципов теоретической механики. Вариационные принципы механики и связанные с ними комплекс физических идей и математических методов имеют активное значение как в теоретической механике, так и в различных научных и технических проблемах. При создании методов автоматизированного моделирования представляет интерес изложенный в работе [2] аналитический метод построения уравнений движения, основанный на вариационном принципе Даламбера-Лагранжа. В работе [3] уравнения динамики получены на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Изложенный в данной работе метод построения уравнений динамики в канонических переменных позволяет дифференциальные уравнения динамики представить в виде, удобном для их решения численными методами. В данной работе предлагаются аналитические методы моделирования кинематических свойств и управления динамикой систем с программными связями, реализуемые в автоматизированных информационных системах компьютерной математики.

Вследствие динамических аналогий методы, предложенные в работе, применимы для решения задач управления динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы, в том числе механических, электрических, робототехнических, экономических систем. Моделирование кинематических свойств. Для программирования движения управляемых механических систем может быть эффективно использован метод построения динамических систем с заранее заданными кинематическими свойствами [6]. Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется определить аналитические выражения управляющих воздействий, приложенных к механической системе для перемещения изображающей точки в некоторой области плоскости с обходом «подвижных» препятствий. Для решения поставленной задачи можно использовать общую структуру систем дифференциальных уравнений следующего вида (1). В системе (1), – непрерывные функции, обращающиеся в нуль вдоль кривых, – произвольная непрерывная функция, , , , , . Варьируя значениями функций, , , можно обеспечить устойчивость или неустойчивость кривых. Выражая прямоугольные координаты и скорости через обобщенные координаты и скорости механической системы и подставляя полученные выражения в (1), можно получить уравнения неголономных связей, описывающие кинематические свойства механической системы. Построение уравнений динамики в канонических переменных. Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа (2) с учетом наложенных на нее уравнений голономных и неголономных программных связей [2], , , (3), , (4). В уравнениях (2)-(4) в качестве основной переменной выступает вектор обобщенных координат перемещений. – функция Лагранжа, – кинетическая энергия системы, – потенциальная энергия, – диссипативная функция, – обобщенные непотенциальные внешние силы, – управляющие силы или реакции связей. Избыточные переменные, , оценивающие отклонения от уравнений связей, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям возмущений связей, разрешенных относительно старших производных, (5). Уравнения (5) составляются таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость и стабилизацию связей. Управляющие силы в (2) определяются выражением [2], (6), , , где – вектор произвольных множителей. Равенствами, , (7) вводятся в рассмотрение новые переменные, , , принимаемые в качестве обобщенных импульсов. Рассматривая обобщенные скорости как функции обобщенных координат перемещений и импульсов, , , функцию Гамильтона и соответственно уравнения (2) с учетом (6) можно представить в виде (8) (9) (10). Уравнения возмущений связей в канонических переменных примут вид (11) (12) (13) (14). Уравнения (9), (10) составляют уравнения движения в канонических переменных и рассматриваются совместно с уравнениями возмущений связей (11) – (14). Совокупность, , , , составляет канонические переменные. Определение управляющих воздействий. Управляющие силы определяются в виде. Для

определения выражений множителей следует продифференцировать уравнения связей (3), (4) с учетом дифференцирования уравнений (9), (11), (12) по времени. Тогда обобщенные управляющие силы можно представить в виде . (15)

Исключением множителей из уравнений системы (10) можно получить окончательный вид уравнений движения (16) (17) Пример Необходимо построить уравнения динамики в канонических переменных плоского двухзвенного манипулятора. Пусть m_1 – массы звеньев, g – ускорение свободного падения. Для программирования движения манипулятора по заданной траектории необходимо на координаты и скорости конца схвата наложить ограничения, описываемые уравнениями дифференциальных связей. Соответствующие уравнения неголономных связей могут быть получены с помощью системы (1). Для решения задачи стабилизации связей вводятся уравнения программных связей .

Выражения кинетической, потенциальной энергии, диссипативной функции системы с учетом избыточных переменных запишутся в виде . Учитывая , из равенств (7) можно получить где Выражая обобщенные скорости через канонические переменные , можно получить уравнения динамики в канонических переменных Построение и решение полученных уравнений проведены в системе символьных вычислений Maple. Некоторые результаты моделирования динамики манипулятора с применением изложенных методов приведены в работе [9].