

В статье ставится и решается задача о неустановившемся температурном поле в жидкости, перемещаемой в радиально-расходящемся бесконечно-протяженном канале. Она расширяет тематику ранее решенных задач [1-8]. Используемая расчетная схема приведена в рассмотренных работах [5,6]. Начальные и граничные условия представлены на рис. 1. Рис. 1 - Начальные и граничные условия Постановка задачи Даны две плоскопараллельные круглые пластины неограниченного радиуса. Между пластинами в радиальном направлении в момент начала отсчета времени через штуцер радиуса от центра к периферии начинает перемещаться нагретая жидкость с переменной средней скоростью. Жидкость на входе в любой момент времени имеет постоянную температуру. Предполагается, что в начальный момент времени жидкостью с температурой заполнено все пространство между пластинами, то есть имеет место мгновенное заполнение объема между пластинами нагретой жидкостью в момент начала отсчета времени. Температура нижней и верхней пластин, обращенных к жидкости, постоянна и равна и соответственно. Причем, между жидкостью и пластинами происходит теплообмен по закону Ньютона с различными коэффициентами теплоотдачи и. Расстояние между пластинами равно. Секундный объемный расход греющей жидкости равен. Требуется найти температурное поле в жидкости. Начально-краевая задача (рис. 1) Уравнение энергии для рассматриваемого случая, а также начальные и граничные условия имеют вид где - средняя радиальная скорость в канале, полученная из уравнения неразрывности потока. Преобразование представленной выше задачи с учетом выражения для позволяет получить (1) (2), (3) (4) (5) (6) где Редуцирование (1)-(6) с помощью выражения (7) дает две задачи (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) Решение начинается с задачи (14)-(18). Вводится новая температурная функция (19) Это позволяет после подстановки (19) в (14)-(18) получить те выражения неизвестных постоянных через параметры задачи, которые дают возможность прийти к однородной краевой задаче относительно функции Преобразования приводят к системе двух алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов Решение данной системы по методу Крамера дает В результате задача (14)-(18) преобразуется к виду (14а) (15а) (16а) (17а) (18а) Задача (14а)-(18а) решается методом разделения переменных. Если положить (20) то будет Или (21) (22) (23) (24) (25) (26) Решением (24)-(26) будет [9] (27) Здесь - корни характеристического уравнения (28) Решением (21) с учетом задачи (24)-(26) является выражение [9] (29) где Удовлетворение условиям (22), (23) приводит к соотношению (30) На основании (20) получено частное решение (31) Общее решение задачи (14а), (16а)-(18а) имеет вид (32) Коэффициенты в (32) определяются из условия (15а) (33) В [10] доказано, что система функций, стоящая под знаком суммы в (33), будет ортогональной на интервале. Поэтому коэффициенты в разложении (33) могут быть найдены следующим образом Вычисление коэффициентов после преобразования

подинтегральных выражений числителя и знаменателя в (34) требует знания значений следующих интегралов [11]: Тогда В результате получено (35) И, наконец, согласно (19), можно записать (36) Задача (8)-(13) также решается разделением переменных: Если положить (37) то разделение переменных дает Далее В результате получаются три задачи (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) где Решение (38) дает [9] (46) где Удовлетворение условиям (40), (39) позволяет последовательно получить так как при иначе будет иметь место тривиальное решение, поэтому Откуда по условию (39) при получается (47) где - положительные корни уравнения (47), Итак, частным решением (38)-(40) будет функция (48) с характеристическим уравнением (47). Решение краевой задачи (43)-(45) приводит к выражению (49) где - корни трансцендентного уравнения (50) Задача Коши (41), (42) удовлетворяется при (51) где Здесь обозначение заменено на так как вышеприведенные задачи (38)-(45) взаимосвязаны. Следует отметить, что характеристическое уравнение (50) идентично характеристическому уравнению (28) при замене значка на . Указанное обстоятельство будет учтено в дальнейшем при построении решения задачи (1)-(6). Таким образом на основании (37), (48), (49). (51) записывается общее решение задачи (8), (10)-(13) где здесь в целях унификации с (36) введен сомножитель В выражении (52) остается только удовлетворить условию (9). (53) Преобразование последнего соотношения дает (54) Для определения постоянных следует умножить левую и правую части (54) на и проинтегрировать полученное выражение соответственно в пределах от до по и от до по Тогда на основании известного свойства ортогональности в интервале от до для рассматриваемых функций [10] будет так как интеграл суммы равен сумме интегралов, а все интегралы в указанных суммах равны нулю при и и лишь один интеграл в каждой сумме будет больше нуля при и. Ортогональность имеет место также в случае с функциями Бесселя, то есть Следует отметить, что указанное свойство ортогональности бесселевой функции второго рода с весом на интервале было показано автором данной статьи и в литературе отсутствует. Это доказательство очень громоздко и здесь не приводится. С учетом изложенного можно записать очевидное выражение. (55) Рассмотренная процедура фактически представляет разложение произвольной функции в ряд Фурье-Бесселя в интервале изменения от и от до В качестве произвольной функции здесь выступает левая часть выражения (54). Для определения коэффициентов следует вычислить семь определенных интегралов, три из которых по переменной - несобственные, два интеграла по переменной - однотипные, то есть требуют одного вычисления с заменой индекса на . Причем интегралы по при вычислении распадаются на семь более простых интегралов. Ниже приводятся значения интегралов по переменной , полученные на основании вычисления преобразованных интегралов [11] Вычисление несобственных интегралов по координате Первый интеграл (он же и второй) в

выражении (55) вычисляется с использованием [12] после подстановки нижнего предела и предельного перехода при Ω равен Третий интеграл левой части и интеграл правой части выражения (55) вычислялись с использованием дифференциальных уравнений Бесселя. Отличие состояло в том, что при вычислении интеграла в правой части (55) бралось произведение бесселевых функций различных действительных аргументов и при раскрытии неопределенности вида использовалось правило Лопиталя. Опуская громоздкие рутинные преобразования можно сразу записать Следует отметить, что соотношения для последних двух интегралов выведены с учетом характеристического уравнения (47). Подстановка вычисленных интегралов в выражение (55) с учетом соотношения (35) для коэффициентов α_n , а также идентичности характеристических уравнений (28), (50) после рутинных алгебраических преобразований, позволила получить (56) На основании (7), (35), (36), (47), (50), (52), (56) можно записать окончательное решение задачи (1)-(6) (57) Здесь необходимо отметить, что поскольку то выражение (35) следует переписать в виде (58) Полученное решение обобщает согласно [13] целый ряд как уже решенных, так и нерешенных задач. Если, например, в общем решении (57) устремить $\lambda \rightarrow 0$, то получается стационарное решение этой же задачи (граничные условия третьего рода) в виде (58) (58) При устремлении или $\lambda \rightarrow \infty$ получается решение этой же нестационарной задачи при граничных условиях первого рода [8], хотя и выраженное в несколько иной форме. Здесь следует заметить, что решение [8] является более точным, чем упрощенное решение [6] этой же задачи [8], полученное ранее без учета теплопроводности в направлении координаты z В случае получается решение стационарной задачи при граничных условиях первого рода [7], правда, выраженное в несколько иной форме. В решении, вытекающем из результатов настоящей статьи, нет экспоненциальных функций по координате z , которые присутствуют в [7]. При можно получить более точное решение нестационарной задачи при смешанных граничных условиях работы [1], в которой пренебрегалось теплопроводностью в направлении координаты z . Когда $\lambda \rightarrow 0$, то идентифицируется решенная ранее стационарная задача при смешанных граничных условиях [14]. Из решения (57) при различных значениях параметров вытекают решения целого ряда нестационарных задач при различных граничных условиях: 1. 2. 3. 4. Из этого же решения (57) вытекают при решения тех же 4-х, но стационарных задач при исключении условия Если положить $\lambda \rightarrow 0$ то получаются новые выражения для только что разобранных выше частных решений и для самого обобщенного решения (57). Возможны еще варианты нестационарных и стационарных условий теплообмена, которые охватывают практически все возможные начально-краевые и краевые граничные условия первого и третьего рода. Однако обобщенное решение (57), к сожалению, может дать лишь частный случай граничных условий второго рода. Обозначения - радиальная и осевая

координаты цилиндрической системы координат, м; -текущие температуры
 жидкости при неустановившемся теплообмене, К ; - текущая температура
 жидкости при установившемся теплообмене, К ; - постоянная температура
 горячей жидкости на входе в канал , К ; - постоянные температуры верхней
 нижней стенок канала, обращенных к жидкости, соответственно, К; -
 внутренний радиус штуцера на входе в канал, м; - объемный расход жидкости,
 м³/с; - коэффициент температуропроводности, м²/с; - ширина канала, м; -
 константа, м²/с; - средняя радиальная скорость движения жидкости, м/с;
 теплопроводность жидкости, Вт/(м К); - время, с; - константы разделения; -
 коэффициенты теплоотдачи от жидкости соответственно к стенке 1 и к стенке
 2, Вт/(м² К); ; - бесселева функция первого рода действительного аргумента
 порядка безразмерная; - бесселевы функции второго рода действительного
 аргумента порядка безразмерные; - бесселевы функции второго рода
 действительного аргумента порядков и , соответственно, безразмерные; -
 бесселева функция первого рода мнимого аргумента порядка безразмерная; -
 бесселевы функции второго рода мнимого аргумента порядка безразмерные.