Проблема контактного взаимодействия двух тел является одной из наиболее сложных и вместе с тем одной из наиболее важных проблем механики деформируемого твердого тела. Элементы, из которых состоит любая конструкция, взаимодействуют между собой, а также входят в контакт с другими объектами. Необходимостью учета подобных взаимодействий обусловлено развитие теории контактного взаимодействия. Исследованиями в данной области занимались такие отечественные ученые, как Л.А. Галин, И.Я. Штаерман, И.И. Ворович, В.М. Александров, В.И. Моссаковский, Ю.П. Артюхин, Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев, Г.Я. Попов, М.В. Блох и др. [1-9]. Для многих задач механики очень сложно найти точное аналитическое решение. Поэтому с развитием компьютерной техники большую популярность получили приближенные методы (например, МКЭ, МГЭ и др. [10-17]). В решении задач механики контактного взаимодействия приближенные методы играют значительную роль, а разработка и совершенствование новых численных и численно-аналитических методик решения контактных задач является актуальной проблемой. Одним из основных приемов решения контактных задач является построение интегрального уравнения относительно контактного давления и его решение. Данный прием может быть осуществлен сравнительно просто, если известна функция влияния. Согласно корректной постановки контактных задач для тонкостенных элементов конструкций [18] условия контакта поверхности штампа и пластины записываются [19] в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода: (1) Здесь – неизвестное контактное давление, – функция влияния, – коэффициент обжатия, h – толщина пластины, – функция формы и жесткого смещения штампа, – некоторая система координат, связанная со штампом. Интеграл по области контакта Ω моделирует изгиб срединной поверхности пластины, – перемещения поверхности пластины в результате местного обжатия. Геометрия взаимодействующих тел зачастую такова, что искать функцию влияния удобнее в системе координат , связанной с пластиной, поскольку в этой системе координат проще сформулировать граничные условия для искомой функции и удовлетворить им. Если функция влияния найдена и известны формулы перехода от системы координат к , то алгоритм решения уравнения (1) заключается в следующем. Область контакта покрывается сеткой топологических прямоугольников, в каждом из которых проводится интегрирование с помощью квадратурной формулы Гаусса. Требуя выполнения условия контакта пластины и штампа в каждой квадратурной точке, сведем проблему определения значений контактного давления в узлах сетки к решению системы линейных алгебраических уравнений: (2) Здесь Ai – весовые множители квадратурной формулы Гаусса; – количество фрагментов разбиения сетки по осям и соответственно; N – количество точек в квадратурной формуле Гаусса; s,t = 1,2,..N; p = 1,2,..; q = 1,2,... Рассмотрим случай круглой пластины радиуса R, лежащей на упругом основании с одним коэффициентом постели k.

Функция влияния для данной пластины является (при заданных граничных условиях) решением уравнения , (3) где , , E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, – δ-функция Дирака. Решение уравнения (3) ищется в виде ряда Фурье: , где символ означает, что при n=0 вводится коэффициент ½. Задача построения функции влияния сводится к решению двух уравнений Бесселя. Общие решения соответствующих им однородных уравнений известны [20], а частные решения находятся с помощью интегрального преобразования Ганкеля [21]. Таким образом, функция влияния получена в виде: где ,,, – функции Кельвина. Постоянные интегрирования определяются из условий на контуре пластины при r = R. Рассмотрим применение изложенной выше методики к решению конкретных задач. Пусть круглая пластина на упругом основании взаимодействует с плоским штампом, который имеет форму сектора кольца (рис. 1). Отметим, что при данном подходе частными случаями являются задачи для штампов в форме сектора, круга, а также в форме кольца. Рис. 1 - Постановка задачи для случая контакта круглой пластины и штампа в форме сектора кольца Будем определять положение штампа с помощью эксцентриситета e, выбранного как расстояние от центра пластины O до точки O1, которая является центром круга при a1 = 0, a2 > 0, θ1 = -π, θ2 = π. Целесообразно в качестве выбрать полярную систему координат ρ,χ с центром в точке O1. Тогда дискретный аналог уравнения (1) примет вид где , а γ – жесткое смещение штампа. Если штамп имеет прямоугольную форму (рис. 2), дискретный аналог уравнения (1) примет вид где Рис. 2 - Постановка задачи для случая контакта круглой пластины и прямоугольного штампа с вырезом Добавление вырезов в прямоугольный штамп позволяет ставить и решать задачи для штампов разнообразных форм. Поскольку внутри вырезов контактные напряжения отсутствуют, система разрешающих уравнений составляется без участия в ней соответствующих слагаемых. Таким образом, число неизвестных равно числу уравнений. Анализ сходимости расчетной схемы проводился на основе численных экспериментов. Исследовалось влияние на конечный результат количества членов ряда функции Грина, а также детализации сетки. Результаты двух таких численных экспериментов, проведенных для задачи контакта пластины со штампом в форме сектора (рис. 3) при условии свободных краев пластины и e = 0.7 м, представлены в табл. 1, 2. Таблица 1 - Влияние количества членов ряда функции Грина m на напряжения. Штамп в форме сектора (рис. 3). 5184 узловые точки m 23 30 40 50 70 100 Макс.напр., (МПа) 1,159∙103 1,155∙103 1,152∙103 1,150∙103 1,149∙103 1,148∙103 Изменение - -0,4% -0,3% -0,1% -0,1% -0,1% Мин. напр., (МПа) -2,336∙102 -2,264∙102 -2,128∙102 -2,033∙102 -1,972∙102 -1,983∙102 Изменение - -3,1% -6,0% -4,5% -3,0% 0,5% Таблица 2 - Влияние детализации сетки на напряжения. Штамп в форме сектора (рис. 3). m = 23 Количество узлов 576 2304 5184 9216 Макс. напр., (МПа) 1,129∙103 1,152∙103 1,159∙103 1,163∙103 Изменение - 2,0% 0,7% 0,3% Мин.

напр., (МПа) -2,333•102 -2,335•102 -2,336•102 -2,337•102 Изменение - 0,1% 0,0% 0,1% При проведении расчетов было принято: E = 2·105 МПа, ν = 0.3, k = 2·108 Н/м3, h = 0,05 м, R = 1 м, γ = 0,005 м, количество точек Гаусса по каждой из координат равно 3 (аналогичные параметры расчетов были приняты и при решении остальных рассмотренных в работе задач). Приведенные данные показывают, что по мере увеличения количества членов ряда функции Грина m максимальные и минимальные напряжения претерпевают все меньшие изменения. Аналогичным образом на конечные результаты влияет и сгущение сетки узлов. Таким образом, данные численных экспериментов позволяют сделать вывод о наличии сходимости расчетной схемы. Представленный выше алгоритм численного решения контактных задач был реализован в виде двух компьютерных программ, работающих совместно. Первая программа содержит оконный интерфейс, работая с которым пользователь может установить исходные параметры расчета: механические характеристики, размеры штампа и пластины, эксцентриситет и ориентацию штампа на пластине, шаг разбиения сетки, положение вырезов в штампе, если они есть. После того, как исходные параметры установлены, программа производит построение сетки узлов и вычисляет в каждой ее точке значения функций Кельвина с учетом перехода от системы координат к системе координат . Также производится вычисление функций Кельвина и их производных на границе пластины. Результаты всех вычислений записываются на жесткий диск, после чего запускается вторая программа, непосредственно реализующая алгоритм решения контактной задачи. В начале своей работы данная программа считывает с жесткого диска результаты вычислений предыдущего этапа. После этого запускается алгоритм составления и решения системы линейных алгебраических уравнений (2). Полученные в результате значения контактного давления в узлах сетки записываются в файл в формате, пригодном для использования в программе визуализации. С помощью представленной выше численно-аналитической методики исследовалось распределение контактных напряжений в зависимости от формы штампа, эксцентриситета его положения, угла поворота и условий закрепления пластины. Поля распределения строились по безразмерным контактным напряжениям, которые вычислялись по формулам , где SΩ – площадь области контакта, а P – сила, которая дается выражением . Для штампов, имеющих форму, основой которой является сектор кольца, выражения для SΩ и P принимают вид: . Для прямоугольных штампов с учетом вырезов , где S0 – площадь вырезанных из штампа фрагментов. Ниже на рис. 3-6 представлены поля распределения контактных напряжений для ряда частных случаев. Рис. 3 - Штамп в форме сектора. Края пластины свободны, e = 0,7 м Рис. 4 - Прямоугольный штамп с двумя произвольными вырезами внутри. На краях пластины жесткое закрепление, e = 0,005 м Разработанная методика обладает достаточно широкими возможностями и при минимальной модификации может быть использована и для решения ряда других классов контактных задач. Рис. 5 - Штамп в форме незаконченного круга. Края пластины свободны, e = 0,7 м Рис. 6 - Квадратный штамп с двумя боковыми вырезами. На краях пластины жесткое закрепление, e = 0,005 м