Введение Значительное число теоретических и прикладных задач приводит к необходимости решения различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений (НСИУ). Многочисленные примеры прикладных задач аэродинамики, теории упругости, электродинамики и дифракции волн приводятся в монографиях Б.Г. Габдулхаева [1], И.К.Лифанова [2, 9]. Из теории таких уравнений следует, что найти точное решение удается лишь в отдельных случаях. Поэтому разработка и теоретическое обоснование аппроксимативных методов их решения является актуальной задачей. Применительно к различным типам НСИУ имеется большое количество теорем о разрешимости и свойствах решений, которые трудно объединить в единую теорию подобную теории линейных уравнений (см., напр., [3]). В настоящее время теория НСИУ представляет собой интенсивно развивающуюся область математики, интерес к которой, как и число работ, посвященных этой теме, постоянно растет. В данной статье, являющейся продолжением работы [4], исследуются вычислительные схемы квадратурного метода решения НСИУ. Основное внимание уделяется теоретическому обоснованию одной из схем метода механических квадратур (м.м.к.). 1.Постановка задачи. Существование и единственность решения В ряде прикладных задач встречается нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида где , – данные функции, – вещественный параметр, а – искомая функция, причем сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши-Лебегу. Поскольку задача (1.1), как правило, точно не решается, то для ее решения разработаны и применяются различные приближенные методы (обзор таких методов можно найти, напр., в [1] ,[5],[6]). Пусть – лебеговы пространства квадратично-суммируемых на функций с весами , и нормами соответственно. Тогда уравнение (1.1) можно записать как эквивалентное операторное уравнение вида , где Рассмотрим соответствующее уравнению (1.1) характеристическое уравнение (1.2) Следующая лемма необходима для анализа однозначной разрешимости исходного уравнения и доказательства сходимости приближенного метода. Пусть и – полиномы n-й степени из системы полиномов, ортогональных соответственно с весами и на отрезке [-1,1], а – коэффициенты Фурье функций по системам полиномов и . Теорема 1.1. Оператор непрерывно обратим, и обратный оператор определяется по формуле где (1.3) а – многочлен Чебышева I рода. При этом для операторов верны оценки (1.4) Доказательство. Умножим обе части характеристического уравнения на функцию , проинтегрируем по переменной t и поменяем порядок интегрирования в левой части. В результате получим Воспользовавшись известным соотношением (см., напр., [2], [7]), имеем (1.5) следовательно, . Поэтому решение характеристического уравнения (1.2) можно представить в виде (1.6) Оценим норму обратного оператора. Для этого сначала найдем норму функции . Из (1.6) и с помощью свойств полиномов Чебышева (см., напр., [7],[8]) имеем (1.7) Из полученных соотношений (1.6)-(1.7) и равенства Парсеваля для любой функции находим . (1.8) Для любой функции в силу (1.8) и равенства Парсеваля находим Отсюда получаем равенства , , а из них – утверждение теоремы. В силу теоремы 1.1 доказывается теорема существования и единственности решения уравнения (1.1), а именно, справедлива Теорема 1.2. Пусть функция удовлетворяет условиям , (1.9) тогда при таких, что , уравнение (1.1) имеет единственное решение при любой правой части, и (1.10) Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 (см.[4]). Поэтому остановимся лишь на некоторых отличительных моментах. Уравнение (1.1) эквивалентно операторному уравнению , . (1.11) Для любых , учитывая соотношение (1.4), а также неравенство Коши-Буняковского, последовательно находим (1.12) где . (1.13) Таким образом, из (1.12)-(1.13) следует оценка , т.е. нелинейный оператор является сжимающим оператором в пространстве X с коэффициентом сжатия q, определенным в (1.10). Отсюда и из принципа сжимающих отображений (см., напр., [6]) следует, что уравнение (1.11), а, следовательно, эквивалентное ему НСИУ (1.1) имеет единственное решение при любой функции. Для него справедлива оценка . (1.14) Из (1.14), в силу (1.9), находим Тем самым утверждение теоремы доказано. 2. Метод механических квадратур Приведем вычислительную схему метода механических квадратур для уравнения (1.1). Схема 1. Приближенное решение ищем в виде многочлена , (2.1) где , (2.2) - корни многочлена Qn(t), определенного в (1.3). Неизвестные коэффициенты определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) , (2.3) где (2.4) – корни многочлена Rn(t) из (1.3). Отметим, что для получения СНАУ (2.3) обе части НСИУ (1.1) приравниваем в узлах (2.4), вместо подставляем из (2.1), после чего интегралы вычисляем приближенно по квадратурной формуле с узлами (2.2) (см., напр.,[2]) (2.5) Приведем еще одну вычислительную схему м.м.к. для указанного уравнения. Схема 2. Приближенное решение задачи (1.1) будем искать в виде многочлена , . (2.6) Неизвестные коэффициенты , , будем определять из СНАУ (2.7) Для получения СНАУ (2.7) обе части НСИУ (1.1) приравниваем в узлах (2.4), вместо подставляем из (2.6), после чего интегралы вычисляем приближенно по квадратурной формуле (2.5) с узлами (2.2). Для теоретического обоснования выберем схему 2. Справедливы следующие результаты. Теорема 2.1. Пусть непрерывные функции y(t) и h(t, t, u) таковы, что в условиях теоремы 1.2 решение и функция . Тогда справедливы утверждения: а) СНАУ (2.3) имеет единственное решение при любых n Î N, а приближенное решение , (2.1*) удовлетворяет неравенству , (2.8) где определено в (1.10). б) приближенные решения (2.1*) сходятся при n®¥ к точному решению x(t) в среднем со скоростью, определяемой неравенством где-наилучшее равномерное приближение функции алгебраическими полиномами степени n, - частное наилучшее равномерное приближение функции по переменной, а M определено в (1.9). Доказательство. Обозначим через Hn множество всех алгебраических многочленов степени не выше , где . Введем конечномерные подпространства , .

Обозначим через , – операторы проектирования, где – интерполяционный многочлен Лагранжа функции j (t, t) по переменной t, построенный по узлам (2.2), а – интерполяционный многочлен Лагранжа функции , построенный по узлам (2.4). Для любых n Î N справедливы следующие аппроксимативные свойства введенных выше операторов Лагранжа: ; (2.9) ; (2.10) , y Î C [-1,1], nÎN; (2.11) , y Î C [-1,1], n Î N . (2.12) Легко показать, что СНАУ (2.3) эквивалентна операторному уравнению (см., напр., [1]) , . Поскольку и для любого xn Î Xn, то .Отсюда и в силу (1.4) получаем , (2.13) Покажем, что оператор является оператором сжатия. Для любых xn, zn Î Xn последовательно находим, что Поэтому оператор является сжимающим в пространстве Xnс коэффициентом сжатия 1. Отсюда следует, что уравнение (2.13) имеет единственное решение при любом y Î Y. Для него справедлива оценка . Отсюда имеем . Утверждение а) доказано. Для оценки скорости сходимости приближенного решения к точному , используя(1.4) и неравенство треугольника, последовательно находим . (2.14) Оценим каждое слагаемое по отдельности. Учитывая (2.11), имеем . Для второго слагаемого из (2.14) используем соотношения (см., напр., [8]) (2.15) С помощью (2.15) находим оценку (2.21) Так как то из неравенства (2.14), с учетом (2.9)-(2.12), имеем . Отсюда, окончательно получаем Теорема доказана. В качестве темы НИРС рассматривался пример приближенного решения НСИУ с использованием пакета Matlab. Основным преимуществом предлагаемого подхода является значительное снижение трудоемкости решения поставленной задачи.