

Введение Для расчета собственных волн диэлектрических волноводов предложено множество алгоритмов (см., напр. обзоры в [1], [2]), основанных на конечно-элементных и конечно-разностных аппроксимациях, лучевом приближении, различные варианты метода частичных областей и метода коллокации. Часто авторы интересуются алгоритмическими аспектами и физической интерпретацией численных результатов больше, чем фундаментальными математическими свойствами решений задачи, включая существование, свойства и распределение спектра на комплексной плоскости спектрального параметра. Аналогичная ситуация наблюдается при исследовании собственных волн в слоистых композитных структурах [3], [4]. Данная работа развивает новый подход к математическому и численному анализу спектральных задач теории диэлектрических волноводов, основанный на методах спектральной теории оператор-функций и слабо сингулярных интегральных уравнений [5], [6]. Рассматривается задача о поверхностных и вытекающих собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды [7]. Постановка задачи и ее редукция к нелинейной спектральной задаче с фредгольмовым интегральным оператором представлены в [7]. Сходимость метода Галеркина численного решения этой задачи доказана в [8]. В настоящей работе для решения нелинейной спектральной задачи для системы слабо сингулярных интегральных уравнений предлагается метод сплайн-коллокации и подобластей нулевого порядка. В ходе численных экспериментов устанавливается, что метод сплайн-коллокации имеет первый порядок скорости сходимости. Несмотря на это, метод по объему вычислений имеет значительное преимущество по сравнению с методом Галеркина. Нелинейная спектральная задача для интегрального уравнения по контуру поперечного сечения волновода в однородной среде Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в однородной среде с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды. Пусть образующая цилиндра параллельна оси z , а показатель преломления волновода не зависит от z , является кусочно-постоянной вещественной функцией $n(\rho)$. Показатель преломления вне волновода является постоянной положительной величиной. Обозначим через Ω плоскость поперечного сечения волновода. Пусть область поперечного сечения волновода ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром Γ . Обозначим через Ω^+ область Ω . Пусть функция $n(\rho)$ равна константе n_0 в Ω^+ , кроме того, (т. е. удовлетворяет аппроксимации слабонаправляющего волновода). Как обычно, точку на плоскости будем обозначать символом (x, y) . В скалярном приближении слабонаправляющего волновода задача сводится [7] к отысканию таких значений параметра β , при которых существуют нетривиальные решения

уравнения Гельмгольца (1) (2) где ω – частота электромагнитных колебаний; ϵ – электрическая и магнитная постоянные, соответственно; комплексный параметр β называется продольной постоянной распространения. Функция u должна удовлетворять также условиям сопряжения (3) и условиям излучения на бесконечности (4) Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали, внешней относительно контура Γ ; $H_m(1)$ – функция Ханкеля первого рода порядка m ; (r, φ) – полярные координаты точки x . Ряд (4) является абсолютно и равномерно сходящимся.

Решение задачи (1) – (4) будем искать в виде потенциалов простого слоя (5) (6) где u_0, v_0 – фундаментальные решения уравнений Гельмгольца (1) и (2), а неизвестные плотности и принадлежат пространству непрерывных по Гельдеру функций.

Методами теории потенциала исходная задача сводится к нелинейной спектральной задаче для системы слабо сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода: (7) (8) В работе [7] доказано, что для каждого β интегральный оператор (7) – (8) является фредгольмовым, и исходная задача (1) – (4) является спектрально эквивалентной задаче (7) – (8).

Метод Галеркина В качестве базисных функций выберем тригонометрические и будем строить приближения к собственным функциям и в виде отрезков рядов Фурье. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений метода Галеркина [8]: (9) (10) где ядра интегралов нелинейно зависят от постоянной распространения и определяются равенствами а числовые параметры задаются следующим образом: Таким образом, мы свели задачу к нелинейной конечномерной спектральной задаче, где A – матрица системы уравнений (9) – (10), а u – вектор неизвестных.

Метод коллокации Для аппроксимации интегральных операторов в уравнениях (7) – (8) используем метод сплайн-коллокации и подобластей нулевого порядка [9], с. 241. Разобьем контур Γ на n подобластей – дуг, где τ_j – длину дуги. Точки коллокации выберем в серединах дуг. Приближенное решение, системы (7), (8) будем искать в виде сплайнов нулевого порядка. Потребуем совпадения левых и правых частей этой системы в точках коллокации. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений метода коллокации: (11) (12) Здесь неизвестные – значения искомых функций в точках коллокации. Ядра интегралов этой системы нелинейно зависят от постоянной распространения.

Таким образом, мы вновь свели задачу к нелинейной конечномерной спектральной задаче. При совпадении аргументов интегралы в (11), (12) имеют логарифмическую особенность, однако, они могут быть вычислены аналитически: где ψ – пси-функция. Остальные интегралы вычисляются по методу средних прямоугольников: Приведем результаты численного решения конкретной спектральной задачи теории диэлектрических волноводов. В качестве модельной выберем задачу о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода с кусочно-постоянной диэлектрической проницаемостью и круговым поперечным сечением. В этом случае задача (1) –

(4) решается методом разделения переменных (см., например, [10]). В табл. 1 приведены результаты вычислений нормированных постоянных распространения, полученные методом коллокации в сравнении с точным решением метода разделения переменных $h_6=1,02561149$. Здесь – относительная погрешность вычислений, – параметр скорости сходимости, связывающий погрешность вычислений с размером подобластей, n – число точек коллокации. Таблица 1 – Результаты вычислений, полученные методом коллокации $n \tau \epsilon$

100	0.0634	$1,024+9e-03i$	0,0011	0,018
250	0.0252	$1,025+4e-03i$	0,0004	0,017
500	0.0125	$1,025+2e-03i$	0,0002	0,016
1000	0.0062	$1,025+8e-05i$	0,0001	0,016
2000	0.0031	$1,025+4e-05i$	5e-05	0,016

Параметр скорости сходимости практически не зависит от размера подобластей. Это говорит о том, что метод коллокации имеет первый порядок скорости сходимости. На рис. 1, 2 представлены дисперсионные кривые и линии уровня собственных волн волновода кругового поперечного сечения. Рис. 1 – Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн для волновода кругового поперечного сечения. На рис. 1 показана зависимость поперечного волнового числа от волнового параметра. Сплошными линиями и пунктиром обозначено точное решение, кружочками – результат расчетов. Рис. 2 – Линии уровня собственных волн волновода кругового поперечного сечения. Нелинейная спектральная задача для интегрального уравнения по контуру поперечного сечения волновода в полупространстве. Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в полупространстве с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды (рис. 3). Рис. 3 – Поперечное сечение волновода в полупространстве. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода задача сводится [6] к отысканию таких значений параметра β , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца (13) (14) удовлетворяющие условиям сопряжения (15) граничному условию (16) и условиям излучения на бесконечности (17). Основным отличием этой задачи от рассмотренной в предыдущих разделах является то, что область представляет собой дополнение области не до всей плоскости, а до верхней полуплоскости. Как следствие, появляется дополнительное граничное условие (16), а парциальные условия излучения принимают вид (17). Свойства решений этой задачи хорошо исследованы теоретически [6]. Наша цель – развить и исследовать метод сплайн-коллокации с подобластями нулевого порядка для численного решения этой задачи. Решение задачи (13) – (17) будем искать в виде потенциалов простого слоя (18) (19) где. Отметим, что здесь в отличие от представлений (5) используется не фундаментальное решение уравнений Гельмгольца на плоскости, а функция Грина для полуплоскости. Это позволяет точно учесть граничное условие (16) и поведение искомых функций на бесконечности. Используя свойства потенциалов простого слоя, исходную задачу

сведем к нелинейной спектральной задаче (20) (21) Функции Грина в (20), (21) отличаются от фундаментальных решений уравнений Гельмгольца гладким слагаемым. Поэтому для каждого β интегральный оператор системы (20), (21) является фредгольмовым, и исходная задача (13) – (17) спектрально эквивалентна задаче (20), (21). Для численного решения данной задачи используем метод коллокации. Все выкладки аналогичны случаю задачи о собственных волнах волновода в однородной среде. Приведем результаты численных экспериментов. На рис. 4 представлены линии уровня функции u для волновода с поперечным сечением в форме полукруга, находящегося в полупространстве, построенные при $\beta = 1$ и $N = 500$. Рис 4 - Линии уровня для волновода в форме полукруга

Сравнение методов Для сравнения объемов вычислений метода Галеркина и метода коллокации измерялось время счета, которое необходимо было затратить для достижения одинаковой относительной погрешности при решении модельной задачи. Таблица 2 – Сравнение методов

n	time(s)	N	time(s)	error
100	12	1e-3	1	1449
500	167	3e-4	3	6484
2000	2308	4e-4	4	10450
4000	9457	0		

Результаты измерений приведены в таблице 2. Здесь n – количество точек коллокации, N – число членов ряда Фурье метода Галеркина, – относительная погрешность вычислений методом коллокации, – относительная погрешность вычислений методом Галеркина, $time(s)$ – время вычисления в секундах. Как видно из таблицы, метод коллокации значительно быстрее метода Галеркина