

Общие подходы к изучению равновесия твердых тел под действием сил сухого трения изложены в [1]. Частная задача о равновесии стержня на шероховатой плоскости решена в [2]. Случай закрепленной круглой пластины с отверстием исследовался в [3]. Дополнительное влияние механических характеристик материала рассматривалось в [4]. Однако пока не исследованным остается вопрос о равновесии незакрепленной пластины на шероховатой плоскости в самом общем случае, когда линия действия равнодействующей силы проходит не через центр пластины. Рассмотрим задачу в следующей постановке.

Однородная пластина в форме круглого диска лежит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом сухого трения f . Пусть приложенные к диску внешние силы имеют равнодействующую, направленную в плоскости диска и равную по величине G , где G – вес диска, f – коэффициент. Расстояние от центра диска C до линии действия этой силы равно r , где R – радиус диска. Требуется определить максимальное значение r , при котором диск может находиться в равновесии. Приведем систему сил трения, действующих на диск, к главному вектору и главному моменту относительно точки L . Из условия следует, что главный момент M . (Таким образом, является равнодействующей системы сил трения.) При выходе из равновесия диск начнет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра вращения K . Картина распределения при мгновенном вращении вокруг точки K такова, что проекции сил на прямую $КС$ на малых площадках dS и dS' , симметричных относительно $КС$, взаимно сокращаются: $f dS = f dS'$. Поскольку $dS = dS'$, то и проекция $dF = dF'$. Поэтому $dF = dF'$. С другой стороны, $dF = f dS$, то есть $dF = f dS$. Значит, точка K лежит на прямой CL (рисунок 1). Рис. 1 –

Элементарные силы трения на малых участках пластины Обозначим r . Значение r ищем таким, чтобы удовлетворялось условие $r \leq R$, то есть $r \leq R$, (1) где силы трения на малых площадках направлены против возможных перемещений при возможном вращении диска под действием G , то есть перпендикулярно отрезкам $КМ$. Выберем начало координат в точке K . По теореме Вариньона: $\sum M_K = 0$. (2) Здесь $\sum M_K = 0$. Полагая, что давление пластины на опорную плоскость распределено равномерно по площади. Тогда нормальная реакция определяется из пропорции: $N = G$. Здесь $N = G$. Из уравнения равновесия: $\sum M_K = 0$. Тогда $\sum M_K = 0$. (3) $\sum M_K = 0$. (4) Подставим (2), (3), (4) в (1). При этом, так как R не задан, удобно перейти к безразмерным координатам: $\rho = r/R$. (5) После сокращения коэффициента получим: $\int_0^1 \rho^2 d\rho = 1/3$, (6) где область интегрирования задана соотношением $\rho \leq 1$. Соотношение (6) представляет собой нелинейное уравнение вида $\int_0^1 \rho^2 d\rho = 1/3$. Как выясняется из анализа интеграла в (6) либо из численного эксперимента, функция монотонно возрастает и уравнение (6) имеет единственное решение. Заметим, что аналитическое интегрирование в (6) было бы весьма громоздко, особенно с учетом того, что область интегрирования зависит от ρ . Даже если произвести такое интегрирование, то получившееся нелинейное уравнение относительно ρ можно было бы решить лишь численно. Поэтому удобнее решить уравнение (6) полностью численно, применив,

например, метод деления отрезка пополам. При этом численно интегрировать удобнее не по кругу, а по квадрату. Для этого интеграл в (6) удобно представить в виде , где область интегрирования $S_{\text{кв}}$ определяется соотношениями: , , а подынтегральная функция: Для вычисления интеграла достаточно использовать квадратурную формулу прямоугольников (для удобства записи индекс «1» опущен): , где – малый шаг метода, (учтено, что длина стороны квадрата равна 2), ; начальные узлы: . Для получения ответа с абсолютной погрешностью, не превышающей , достаточно выбрать, например, . Легко выяснить, что при любых точка К находится левее С. Иначе было бы , , то есть не было бы равновесия.

Исследуем вопрос о том, как нужно выбрать отрезок варьирования для в методе деления отрезка пополам. Полагаем . Верхняя граница для определяется из численного эксперимента при минимальном допустимом значении . Действительно, если было бы , то возможное движение диска было чисто поступательным. При этом мгновенный центр вращения К устремился бы к бесконечности. Поэтому при неограниченно малых значениях задать верхнюю границу для не представлялось бы возможным. Ограничение эту проблему снимает. В качестве примера возьмем . Вначале можно искать , например, на отрезке . Выясняется, что при получаем , а при будет , причем функция монотонно убывает. Поэтому для ускорения счета можно оставить отрезок .

Переходим ко второму этапу решения задачи. При равновесии диска: . (7) Здесь . Так как , с учетом (3) получим: . При переходе к безразмерным координатам (5): , (8) где область интегрирования и методика интегрирования интеграла те же, что и для интеграла в (6). Теперь учтем в (7) соотношения, и (8): , откуда после сокращения Р, R получим окончательно: . (9) Коэффициент входит в (9) как множитель. Поэтому для анализа результатов достаточно выбрать какое-то фиксированное значение . Далее результаты приведены для . Параметр сложным образом влияет на значение интеграла , а также входит в выражение в знаменателе в (9). В предельном случае , то есть при приложении силы к центру диска, при выходе из равновесия движение, очевидно, будет поступательным, то есть . При этом , откуда . Этому соответствует численное решение задачи: при малом получаем значения (радиус возможного вращения диска велик) и . При увеличении значения получим следующие результаты. При : и . При : и . При : и . При при приложении силы к краю диска по касательной получаем (центр возможного вращения диска находится внутри круга) и . Таким образом, при увеличении от 0 до 1 величина k монотонно уменьшается от значения, равно f, до значения, равно . При дальнейшем увеличении (при линия действия сила лежит вне пластины) величина k будет дальше монотонно убывать, стремясь к нулю при . (Например, при : , а при : .) Таким образом, задача о равновесии круглой пластины на шероховатой плоскости имеет однозначное решение, которое находится численно в два этапа. На первом этапе определяется положение центра мгновенного вращения пластины. На втором этапе находится

значение искомой силы, соответствующее предельному равновесию пластины.