При колебаниях реальных объектов наличие естественного демпфирования, скорее, правило, чем исключение. Но при изучении колебаний его часто не учитывают [1,2]. Предполагается, видимо, что оно только понижает амплитуду колебаний и не влияет существенно на другие параметры. Но исследования показывают, что на самом деле картина более сложная, и даже небольшое демпфирование может существенно изменить некоторые характеристики динамической реакции системы. Многие методы прямого интегрирования уравнений движения обладают так называемым схемным демпфированием, которое называют еще искусственным демпфированием или схемной вязкостью. Оно выражается в том, что из-за особенностей вычислительной схемы самопроизвольно снижается амплитуда колебаний. Этот эффект можно использовать, и схемное демпфирование может в той или иной степени заменить естественное. Сравним два метода прямого интегрирования, у одного из которых нет искусственного демпфирования, а у другого есть. Это метод Ньюмарка (метод 1) [3] и метод, изложенный в работе [4] (метод 2). Рассмотрим свободные изгибные колебания консольного стержня с постоянной по длине жесткостью и погонной массой. В качестве эталонного возьмем решение, полученное с помощью разложения по собственным формам, поскольку этим способом для указанной конструкции можно получить аналитически точное решение. Запишем уравнения свободных колебаний стержня в виде , (1) где матрица жесткости, - матрица масс, вектор перемещений на - м шаге по времени. Величины и определяются соотношениями выбранного метода. Для метода 1: где коэффициенты метода Ньюмарка имеют значения , при которых искусственное демпфирование отсутствует. Для метода 2: Здесь . У этого метода есть схемное демпфирование. Аналитическое решение по му тону собственных колебаний с естественным демпфированием представим в виде (2) Здесь - логарифмический декремент, - частота, функция формы, амплитудный коэффициент, круговая частота, начальная фаза го тона собственных колебаний. В качестве возьмем функции формы изгибных колебаний консольно закрепленного стержня в пустоте [5]: . где , а - длина стержня. Для первых трех тонов (3) Общая динамическая реакция системы состоит из реакций, определяемых по уравнениям (2): , (4) где число учитываемых форм колебаний. Амплитудные коэффициенты -го тона можно определить из начальных условий. Запишем выражение (4) для произвольного сечения в начальный момент времени : . (5) Здесь значения в момент времени . Для определения амплитудных коэффициентов необходимо записать уравнения (5) для сечений. Полученную систему алгебраических уравнений можно представить в матричном виде , (6) где Решив систему (6), определяем амплитуду колебаний: (7) Начальные условия можно задать различным образом, в частности выражением , (8) которое соответствует прогибам стержня длиной , загруженного постоянной погонной нагрузкой интенсивностью . В соответствии с соотношениями (2), скорости и ускорения определяются выражениями (9) Поскольку может быть любым, необходимо определиться с количество учитываемых форм. Как следует из соотношения (7), для стержней с постоянной жесткостью и погонной массой при заданных и соотношение амплитудных коэффициентов не зависит от конкретных значений и , а определяется только характером изменения по длине. Для зависимости (8) , то есть амплитуда второго тона составляет 1,41%, а третьего - 0,12% от амплитуды первого тона. Таким образом, при начальных условиях (8) для определения перемещений с точностью до десятых долей процента достаточно учета первых двух - трех тонов. При рассмотрении соотношений скоростей и ускорений картина меняется. При отсутствии демпфирования, при , амплитуда скоростей го тона будет равна , а ускорений - . Таким образом, соотношения амплитуд скоростей будут равны (10) а ускорений (11) Поскольку для стержня с постоянной жесткостью и массой соотношения частот не меняются и однозначно определяются выражениями (3), то выражения (10) и (11) справедливы для любого такого стержня при начальных условиях (8). Из соотношений (11) видно, что значения ускорений второго тона составляет более половины ускорений первого тона, а третьего - почти 40% от первого. Из этого следует, что на суммарное ускорение в значительной степени влияет ускорение третьего тона. Таким образом, колебания третьего тона, имеющие амплитуду всего 0,12% от амплитуды первого тона, оказывают существенное влияние на величину общего ускорения, определяемого как сумма ускорений всех учитываемых частот. При наличии демпфирования картина меняется. Проведенные численные исследования показали, что даже при очень небольшом демпфировании, с логарифмическим декрементом колебаний , высокочастотные гармоники подавляются. На рис. 1 - 4 приведены некоторые результаты расчетов консольно закрепленного стержня с м, , кг/м, при начальном прогибе, определяемом выражением (8) при Н/м. На графиках показаны перемещения, скорости и ускорения концевой точки стержня. Произведено нормирование перемещения относительно его амплитудных значений. Рис. 1 - Изменение перемещения концевой точки по времени, m - число шагов по времени, величина шага по времени с: 1 - решение по собственным формам; 2 - решение по методу Ньюмарка; 3 - решение по методу 2 Рис. 2 - Изменение ускорения концевой точки по времени - решение по собственным формам, m - число шагов по времени, величина шага по времени с. Рис. 3 - Изменение ускорения концевой точки по времени - решение по методу Ньюмарка, m - число шагов по времени, величина шага по времени с Рис. 4 - Изменение ускорения концевой точки по времени - решение по методу 2, m - число шагов по времени, величина шага по времени с В аналитическом решении с помощью разложения по собственным формам использовались 3 формы, логарифмический декремент колебаний . Кривые изменения перемещений (рис. 1) и скоростей по времени, полученные разными методами, почти совпадают.

Небольшое отличие заключается в том, что у решения по собственным формам есть незначительное демпфирование, а у методов 1 и 2 нет. В графиках ускорений есть отличия. У аналитического решения (рис.2) и решения по методу 2 (рис.4) заметно демпфирование, которое подавляет высокочастотные гармоники. Так как у метода Ньюмарка, при данных значениях коэффициентов, отсутствует схемное демпфирование, то высокочастотные составляющие спектра сохраняются (рис.3). Таким образом, можно сделать вывод о том, что в определении перемещений и скоростей метод Ньюмарка и метод 2 идентичны и близки к решению по собственным формам, а при определении ускорений, решение, полученное по методу 2, гораздо ближе к аналитическому. И поскольку величина логарифмического декремента колебаний соответствует минимальным значениям - в реальности крайне редко встречаются значения меньше - и уже при этом картина ускорений меняется заметно, то следует признать, что при определении ускорений необходимо учитывать демпфирование. Поэтому в этом случае метод 2 можно использовать, а решение по Ньюмарку в части ускорений нельзя признать удовлетворительным.